

普通高等教育“十二五”规划教材
卓越工程师教育培养计划系列教材
高等学校规划教材

电路与信号分析基础

廖丽娟 主 编
武淑红 郝晓丽 副主编
彭新光 主 审

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是太原理工大学国家级特色专业、教育部“卓越工程师教育培养计划”建设成果。本书系统地介绍了电路、信号与系统的基本概念、基本理论和基本分析方法。全书共 6 章, 内容包括基础知识、直流电路分析、一阶电路时域分析、正弦稳态电路分析、信号与系统的频域分析、信号与系统的复频域分析。各章配有适量的例题和习题, 以利于学生更好地掌握基础理论知识和分析方法。本书配有 PPT 和习题解答等教学资源。

本书可作为高等学校相关专业的学生学习电路与信号分析课程的教材, 也可供各电类相关专业的自学者、工程技术人员参考。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容
版权所有·侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

电路与信号分析基础 / 廖丽娟主编. —北京: 电子工业出版社, 2011.9

高等学校规划教材

ISBN 978-7-121-13712-9

I. ①电… II. ①廖… III. ①电路分析—高等学校—教材②信号分析—高等学校—教材 IV. ①TM133②TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 101172 号

策划编辑: 史鹏举

责任编辑: 史鹏举

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 16.75 字数: 483 千字

印 次: 2011 年 9 月第 1 次印刷

定 价: 33.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

前 言

本书是顺应教育部“卓越工程师教育培养计划”的实施，并结合当前计算机类、电子信息类、通信工程、物联网等专业开设“电路与系统”课程的实际教学需要编写而成。作为高校相关专业的一门重要的技术基础课程，电路与系统的基本理论和分析方法已非常成熟。然而，在经济和科技高速发展的今天，知识更新加速，人才竞争加剧，新的学科领域和学科分支不断涌现，使高校人才培养的目标定位趋向于宽口径、厚基础、重实践的新格局，增开选修课、缩短授课学时已成为高校各专业课程设置的普遍现象。因此，有必要重新整合内容、改革教材体系结构，以解决学时少、内容多、工程化要求高的矛盾。

本书在内容上仍以“直流电路、过渡过程和交流电路”作为教材的主干知识体系，本着必需、够用为度的指导思想，力求讲清概念、强化应用；在结构上采用“先直流后交流，先时域后频域”的顺序，既保持教材知识体系的完整性和连贯性，又能突出反映章节内容的独立性和特殊性；在分析方法上体现电路的“一般分析法、等效分析法、叠加分析法及变换域分析法”相得益彰的逻辑层次，使电路问题的求解在普遍性和特殊性上达到协调统一；在实践技能的训练上推行仿真实验与实物实验并举，全方位、多角度开发学生的创新意识和工程应用能力。

本书精选了适量的例题和习题，在每章后都附有小结，以便学生复习并学以致用。同时，每章中还结合相关内容介绍了仿真软件 Multisim 2001 在电路分析中的应用，使学生可以不受实验条件的限制，及时将所学理论及分析结论在仿真软件中得到验证，为进一步培养学生的电路分析与创新设计能力奠定基础。

本书共6章，参考教学学时为40~50学时，具体可参照下表并使用本书配套课件完成教学计划任务。

教 学 内 容	学 时
第1章 基础知识	4
第2章 直流电路及基本分析法	12
第3章 一阶电路的时域分析	6
第4章 正弦稳态电路分析	10
第5章 信号与系统的频域分析	4
第6章 信号与系统的复频域分析	4
实 验	8
机 动	2

本书配有 PPT、习题解答等教学资源，可登录电子工业出版社华信教育资源网 www.hxedu.com.cn，免费注册、下载。

本书由太原理工大学廖丽娟主编并编写第4、5章，武淑红和郝晓丽任副主编并分别编写第2、3章，相洁参编第1章，空军工程大学余侃民参编第6章，郝晓丽编写了附录A，武淑红整理了习题参考答案。本书的编写思路与内容选择由所有作者共同讨论确定，全书由廖丽娟统稿，彭新光教授仔细审阅了全书，并提出了许多宝贵的意见，在此深表谢意。在本书的编写过程中，引用了一些相关资料，已将主要文献资料列于书末的参考文献中，在此一并向资料的作者致以诚挚的谢意。

在本书的编写过程中，还得到了陈俊杰、段富、冯秀芳、李海芳、彭新光、强彦、张兴忠等的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

限于编者的水平，书中错误和不足在所难免，欢迎使用本书的教师、学生和工程技术人员批评指正，以便改进和提高。

编 者

目 录

第 1 章 基础知识	(1)	2.2.1 支路电流法	(39)
1.1 引言	(1)	2.2.2 网孔电流法	(40)
1.2 电路、信号与系统的基本概念	(2)	2.2.3 节点电压法	(42)
1.2.1 电路及电路模型	(2)	2.3 线性电路的几个基本定理	(44)
1.2.2 信号的基本概念	(4)	2.3.1 叠加定理	(44)
1.2.3 系统的基本概念	(6)	2.3.2 替代定理	(46)
1.3 电路的基本变量	(7)	2.3.3 戴维南定理	(47)
1.3.1 电流及其参考方向	(7)	2.3.4 诺顿定理	(49)
1.3.2 电压及其参考方向	(8)	2.3.5 最大功率传输定理	(51)
1.3.3 电路中的电位	(8)	2.4 Multisim 直流电路分析	(54)
1.3.4 电路中的功率和能量	(9)	小结	(57)
1.4 电路的基本元件	(11)	习题 2	(58)
1.4.1 电阻元件	(11)	第 3 章 一阶电路的时域分析	(65)
1.4.2 电容元件	(12)	3.1 电路的过渡过程及换路定则	(65)
1.4.3 电感元件	(15)	3.1.1 电路的过渡过程	(65)
1.5 电源	(17)	3.1.2 电路的换路定则	(66)
1.5.1 独立源	(17)	3.1.3 初始值的确定	(67)
1.5.2 受控源	(18)	3.2 一阶电路的过渡过程	(69)
1.6 基尔霍夫定律	(19)	3.2.1 一阶电路的零输入响应	(69)
1.6.1 基尔霍夫电流定律	(20)	3.2.2 一阶电路的零状态响应	(73)
1.6.2 基尔霍夫电压定律	(21)	3.3 一阶电路的全响应	(75)
1.7 Multisim 仿真应用	(23)	3.3.1 一阶电路的全响应	(75)
1.7.1 Multisim 2001 软件简介	(23)	3.3.2 三要素法	(77)
1.7.2 Multisim 2001 实例	(23)	3.4 一阶电路的阶跃响应	(79)
小结	(25)	3.4.1 单位阶跃信号	(79)
习题 1	(26)	3.4.2 阶跃响应	(81)
第 2 章 直流电路及基本分析法	(29)	3.5 一阶电路的冲激响应	(82)
2.1 电阻电路的等效变换分析法	(29)	3.5.1 单位冲激信号的定义	(82)
2.1.1 电阻串联、并联及混联的等效变换	(29)	3.5.2 冲激响应	(83)
2.1.2 电阻星形连接与三角形连接及其等效变换	(32)	3.6 卷积积分	(85)
2.1.3 含独立电源网络的等效变换	(35)	3.6.1 信号的时域分解	(85)
2.2 复杂电路的一般分析法	(39)	3.6.2 零状态响应——卷积积分	(86)
		3.7 Multisim 动态电路分析	(87)
		小结	(88)
		习题 3	(89)

第 4 章 正弦稳态电路分析	(93)	4.10.2 用 Multisim 的 AC 频率扫描功能	
4.1 正弦信号的基本概念	(93)	分析电路	(151)
4.1.1 正弦量的三要素	(93)	小结	(153)
4.1.2 有效值	(94)	习题 4	(155)
4.1.3 同频率正弦量的相位差	(95)	第 5 章 信号与系统的频域分析	(162)
4.2 正弦量的相量表示	(97)	5.1 连续周期信号的傅里叶级数	
4.2.1 复数	(97)	展开	(162)
4.2.2 相量	(100)	5.1.1 信号分类	(162)
4.3 正弦稳态电路的相量模型	(101)	5.1.2 周期信号分解为傅里叶级数	(163)
4.3.1 基尔霍夫定律的相量形式	(101)	5.1.3 信号对称性与傅里叶系数的关系	(165)
4.3.2 无源二端元件伏安关系的相量形式	(102)	5.2 连续周期信号的频谱	(169)
4.3.3 电路的相量模型	(105)	5.2.1 单边频谱	(169)
4.4 无源二端网络的等效阻抗与导纳	(107)	5.2.2 双边频谱	(170)
4.4.1 二端网络的阻抗与导纳	(107)	5.2.3 典型矩形脉冲信号的频谱	(171)
4.4.2 阻抗与导纳的串、并联	(109)	5.2.4 傅里叶级数在电路分析中的应用	(174)
4.4.3 RLC 串联的交流电路	(111)	5.3 连续非周期信号的傅里叶变换	(178)
4.4.4 GLC 并联的交流电路	(113)	5.3.1 非周期信号的傅里叶变换	(178)
4.5 复杂正弦稳态电路分析举例	(116)	5.3.2 傅里叶变换的物理意义	(179)
4.6 正弦交流电路的功率	(119)	5.3.3 典型非周期信号的傅里叶变换	(179)
4.6.1 无源二端元件的功率	(119)	5.4 傅里叶变换性质	(183)
4.6.2 二端网络的功率	(122)	5.4.1 线性	(183)
4.6.3 复功率	(125)	5.4.2 时移性	(183)
4.6.4 功率因数的提高	(126)	5.4.3 频移性	(184)
4.6.5 最大功率传输	(129)	5.4.4 尺度变换	(185)
4.7 谐振电路	(130)	5.4.5 对称性	(186)
4.7.1 串联谐振电路	(130)	5.4.6 时域微分性、积分性	(187)
4.7.2 并联谐振电路	(134)	5.4.7 频域微分性、积分性	(188)
4.8 变压器	(136)	5.4.8 卷积定理	(189)
4.8.1 空心变压器	(136)	5.5 线性系统的频域分析	(190)
4.8.2 理想变压器	(138)	5.5.1 系统的频率特性 $H(j\omega)$	(190)
4.9 三相电路	(141)	5.5.2 频域分析法	(192)
4.9.1 三相电源	(141)	5.5.3 电路无失真传输信号的条件	(194)
4.9.2 负载星形连接的三相电路	(144)		
4.9.3 负载三角形连接的三相电路	(147)		
4.9.4 三相电路的功率	(148)		
4.10 Multisim 正弦稳态分析	(149)		
4.10.1 用虚拟仪器做测量仿真	(149)		

5.6	滤波器	(196)	6.2.8	终值定理	(219)
5.6.1	滤波器概述	(196)	6.3	拉普拉斯反变换	(221)
5.6.2	理想滤波器的频率特性	(196)	6.3.1	实数单极点情况	(221)
5.6.3	理想低通滤波器的单位冲激响应	(198)	6.3.2	重极点情况	(223)
5.6.4	理想低通滤波器的单位阶跃响应	(198)	6.3.3	共轭复数极点情况	(224)
5.6.5	实际的低通滤波器	(199)	6.4	线性系统的复频域分析	(225)
5.7	Multisim 频域分析	(200)	6.4.1	微分方程的复频域分析	(225)
5.7.1	用 Multisim 对信号进行傅里叶分析	(200)	6.4.2	电路的复频域模型	(226)
5.7.2	用 Multisim 对网络的传输特性进行分析	(202)	6.5	网络函数与网络特性	(231)
小结		(204)	6.5.1	网络函数	(231)
习题 5		(207)	6.5.2	网络函数的零点、极点	(232)
第 6 章	信号与系统的复频域分析	(210)	6.5.3	网络函数的零点、极点与稳定性	(233)
6.1	拉普拉斯变换	(210)	6.5.4	网络函数的零点、极点与频率特性	(235)
6.1.1	拉普拉斯变换的定义	(210)	6.6	Multisim 复频域分析	(237)
6.1.2	典型信号的拉普拉斯变换	(212)	小结		(241)
6.2	拉普拉斯变换的性质	(214)	习题 6		(243)
6.2.1	线性	(214)	附录 A	Multisim 2001 软件简介	(246)
6.2.2	时移性	(215)	A.1	Multisim 2001 界面主窗口简介	(246)
6.2.3	尺度变换性	(216)	A.2	用户界面设置	(254)
6.2.4	频移性	(216)	A.3	实验中用到的设备的使用方法	(255)
6.2.5	时域微分性	(217)	A.4	仿真实验的基本步骤	(258)
6.2.6	时域积分性	(218)	参考文献		(260)
6.2.7	初值定理	(219)			

第1章 基础知识

学习电路、信号与系统课程主要是掌握电路与系统的基本概念和分析方法。本章首先回顾在电路、信号与系统的发展历史中出现的著名科学家以及他们的成就，同时简单介绍本课程特点和地位；然后介绍电路、信号与系统的基本概念以及它们之间的关系，重点包括电路和电路模型、基本元件、基本变量以及电路的基本定律——基尔霍夫定律。

1.1 引言

当今高度信息化和自动化的社会中，小到家庭生活大到工农业生产以及科学研究，甚至是军事研究和航空航天探索，电路、信号与系统无处不在。人们听的收音机，通信用的电话、手机，上网用的笔记本电脑以及各种功能的家用电器离不开电路，工厂企业自动生产线的控制离不开电路，大型医疗设备、水下核潜艇以及航天飞机等的控制更离不开电路、信号与系统。

电路、信号与系统的发展历史源远流长，在其发展长河中出现了许多世界著名的科学家，他们为电路、信号与系统的发展做出了杰出贡献，回顾他们的学术成就，学习他们的注重实验、重视观察、善于归纳总结和理论升华的科学严谨的研究态度，对于我们学好这门课程有着重要的意义。

1785年法国物理学家库仑(Charlse-Augustin de Coulomb, 1736—1806年)，利用自己发明的扭秤定量地研究了两个带电体之间的相互作用，建立了世界上最早的电学中的著名定律——库仑定律，库仑定律是电学发展史上的第一个定量规律，它使电学的研究从定性进入定量阶段，是电学史上的一个重要的里程碑。电荷的单位库仑就是以他的姓氏命名的。

1800年意大利科学家伏特(Alessandro Volta, 1745—1827年)，发明了伏达电堆，也就是第一种化学电源——铜锌电池，它能把化学能不断地转变为电能，为人们获得稳定持续的电流提供了一种方法，使电学从对静电的研究转变到对动电的研究，具有划时代的意义，引起了电磁学的一场革命，后人为了纪念这位物理学家，把电压的单位定为伏特(Volt)。

安培(André-Marie Ampère, 1775—1836年)，法国著名的物理学家，1825年提出了著名的安培定律，他从1820年开始测量电流的磁效应，从中发现两个载流导线可以相互吸引又可以相互排斥，这一发现成为研究电学的基本定律，为电动机的发明做了理论上的准备。为了纪念他在电磁学上的杰出贡献，电流的单位“安培”以他的姓氏命名。

德国物理学家、数学家欧姆(Georg Simon Ohm, 1787—1854年)1826年提出了经典电磁理论中著名的欧姆定律。时至今日，电路教科书中无一例外地都保留、讲授这一精辟的电学定律，为纪念其重要贡献，人们将其名字作为电阻单位。

英国物理学家、化学家，也是著名的自学成才的科学家法拉第(Michael Faraday, 1791—1867年)发现了电磁感应现象，他认为电与磁是一对和谐的对称现象。既然电能生磁，他坚信磁亦能生电，他完成了在磁体与闭合线圈相对运动时在闭合线圈中激发电流的实验，发现在线圈内运动的磁体可以在导线中产生电流，这一发现成为发明和制造发电机和变压器的理论依据，从而使机械能转变为电能成为可能，推动了电在工业上的广泛应用，宣告了电气时代的到来。

英国物理学家焦耳(James Prescott Joule, 1818—1889年)一生都在从事实验研究工作，在电磁学、热学、气体分子动理论等方面均做出了卓越的贡献。他是靠自学成为物理学家的。从1840年起，焦耳

开始研究电流的热效应,把环形线圈放入装水的试管中,测量不同电流和电阻时的水温,通过实验发现:导体中一定时间内所生成的热量与导体的电流的二次方和电阻之积成正比。此后不久的1842年,俄国著名物理学家楞次也独立地发现了同样的规律,进一步验证了焦耳关于电流热效应结论的正确性,所以被称为焦耳—楞次定律。这一发现为揭示电能、化学能、热能的等价性打下了基础,敲开了通向能量守恒定律的大门。能量或功的单位就是以“焦耳”命名的。

德国物理学家基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887年),以他对光谱分析、光学和电学的研究而著名。1845年,21岁时他发表了第一篇论文,提出了稳恒电路中电流、电压、电阻关系的两条电路定律,即著名的基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL),解决了电器设计中电路方面的难题。后来又研究了电路中电流的流动和分布,从而阐明了电路中两点间的电势差和静电学的电势这两个物理量在量纲和单位上的一致,使基尔霍夫电路定律具有更广泛的意义。直到现在,基尔霍夫电路定律仍旧是解决复杂电路问题的重要工具。基尔霍夫被称为“电路求解大师”。

德国物理学家赫兹(Heinrich Rudolf Hertz, 1857—1894年)通过放电线圈的火花放电实验,发现近旁未闭合的绝缘线圈中有电火花跳过,便敏锐地认识到这可能是电磁感应现象,证实了无线电波的存在。1887年11月5日,赫兹在一篇题为《论在绝缘体中电过程引起的感应现象》的论文中,总结了这个重要发现。赫兹还通过实验确认了电磁波是横波,具有与光类似的特性,如反射、折射、衍射等,并且实验了两列电磁波的干涉,同时证实了在直线传播时,电磁波的传播速度与光速相同,从而全面验证了麦克斯韦的电磁理论的正确性,并进一步完善了麦克斯韦方程组,因为对电磁学有很大的贡献,故频率的国际单位赫兹以他的名字命名。

法国电报工程师和教育家戴维南(Léon Charles Thévenin, 1857—1926年),在基尔霍夫定律和欧姆定律的基础上,提出了戴维南等效定理,于1883年发表在法国科学院刊物上,论文篇幅仅一页半,是在直流电源和电阻的条件下提出的,然而由于其证明所带有的普遍性,实际上它适用于当时未知的其他情况,如含电流源、受控源及正弦交流、复频域等电路,目前已成为一个重要的电路定理。定理的对偶形式50余年后由美国贝尔电话实验室工程师诺顿(E.L.Norton)提出,即诺顿定理。

法国数学家、物理学家傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768—1830年),是傅里叶定律的创始人,1807年向巴黎科学院呈交《热的传播》论文,推导出著名的热传导方程,并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示,从而提出任何一个函数都可以展成三角函数的无穷级数。由此创立了傅里叶级数(即三角级数)、傅里叶分析等理论。傅里叶变换的基本思想首先由傅里叶提出,所以以其名字来命名以示纪念。正是由于它的良好性质,傅里叶变换在物理学、数论、组合数学、信号处理、概率、统计、密码学、声学、光学等领域都有着广泛的应用。时至今日,在任何一本信号与系统的教科书中都能找到傅里叶级数和傅里叶变换的内容,而近代出现的离散傅里叶变换、快速傅里叶变换又赋予了傅里叶分析更强大的生命力。

法国数学家拉普拉斯(Laplace, 1749—1827年)提出了一种新的积分变换,即拉普拉斯变换,它是为简化计算而建立的实变量函数和复变量函数间的一种函数变换。条件更宽松、应用范围更广泛,在电学、线性系统、控制自动化等领域都有广泛的应用。

1.2 电路、信号与系统的基本概念

1.2.1 电路及电路模型

电路是电气设备或电气元件按一定的方式组成并具有一定功能的连接整体,电路为电流提供了通路。

在现代化农业生产、国防建设、科学研究及日常生活中,使用着各种各样的电气设备,例如电动机、雷达导航设备、计算机、电视机以及手机等。广义上说,这些电气设备都是实际电路。

图1.1(a)是一个简单的照明电路,由电池、开关、连接导线、灯泡组成。其作用是把由电池提供的电能传送给灯泡并转换成光能。电池就是该照明电路的电源,提供电能,它的作用是将化学能转换为电能;灯泡是负载,将电源提供的电能转换为光和热能;导线和开关是电源与负载的中间环节,起着连接电源与负载、传输电能及控制的作用。电源、负载和连接导线是任何实际电路不可缺少的组成部分。

图1.1(b)是计算机电路组成的简化框图,它的基本功能是通过处理输入信号实现数值计算。人们在键盘上输入计算数据和步骤,编码器将输入信号表示成二进制数码,经运算、存储、控制部件处理得到计算结果,然后在显示器上输出。

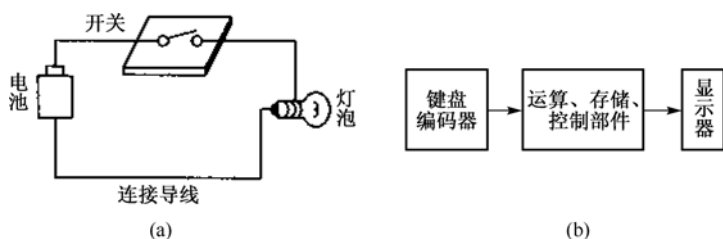


图 1.1 实际电路

实际电路种类繁多,其结构形式多种多样,但从电路的组成和功能上来看,可将电路分为两大类。一类完成能量的产生、传输、分配和转换,典型的例子就是电力系统。一般电力系统包括发电厂、输变电环节和负载三个组成部分。在各类发电厂中,发电机组分别把不同形式的能量(热电厂的热能、水电厂的水能和核电厂的原子能)转换为电能,并通过输变电环节将电能输送给各用户,通过用户的电灯、电动机、电炉等用电设备把电能转化为其他形式的能量,如灯泡将电能转换为光能,电动机将电能转换为机械能,电炉则将电能转换为热能。这类电路具有电压高(如我国电力系统的运行电压已达 750 kV)、电流大、功率强的特点,所以称为强电系统。另一类电路实现信息的传递和处理,如手机、电话、收音机、电视机、计算机等电路。这类电路对输入信号(如声音、音乐、图像等)进行变换或处理成为人们需要的输出信号送到扬声器或显像管等输出设备中进行播出或显示。由于这类电路所涉及的电压和电流都较小,所以称为弱电系统。

在实际电路中使用着各种各样的电气元器件,如电阻器、电容器、电感器、灯泡、电池、晶体管、变压器等。对于一个实际元件来说,其电磁性能也不是单一的。例如滑线变阻器由导线绕制而成,但有电流通过时,不仅具有电阻的性质会消耗电能,而且具有电感的性质还会产生磁场;不仅如此,导线的匝与匝之间还存在着分布电容,具有电容的性质。上述电性质交织在一起共同产生作用,而且电压、电流频率不同时,其表现程度也不一样。

在电路分析中,如果对实际器件的所有性质都加以考虑,将是十分困难的。为此,在电路理论中采用了模型的概念,对于组成实际电路的各种器件,我们忽略其次要因素,只抓住其主要电磁特性,对实际元件加以近似使之理想化,用具有单一电磁性能的理想电路元件来代表它。这与经典力学中的采用质点作为小物体的模型一样,用理想电路元件模型进行电路问题的研究与分析可以使问题的处理大为简化,从而便于人们认识和掌握。

对于电路模型的概念特别需要强调的有下面几点:

(1) 理想电路元件是一种理想的模型,它在物理上具有某种确定的电磁性能,在数学上也具有严格的定义,但实际中并不存在。理想电阻元件只消耗电能而没有电场和磁场特性,其元件模型如图

1.2(a)所示；理想电容元件只储存电能，既不消耗电能也不储存磁能，其元件模型如图1.2(b)所示；理想电感元件只储存磁能，既不消耗电能也不储存电能，其元件模型如图1.2(c)所示。

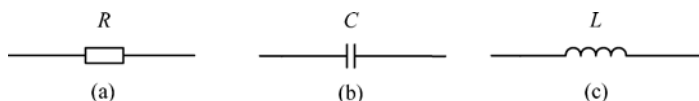


图 1.2 理想元件模型

(2) 不同的实际电路部件只要具有相同的主要电磁特性，在一定的条件下可用同一个电路模型来表示。比如电阻器、灯泡、电炉等，这些器件在电路中的主要特性都是消耗电能，因此都可用理想电阻元件作为它们的模型。

(3) 同一个实际电路部件在不同的条件下可以用不同的模型来表示。例如，一个线圈在工作频率较低时，用理想电感元件作为模型；在需要考虑能量损耗时，使用理想电阻和电感元件串联电路作为模型；而在工作频率较高时，则应进一步考虑线圈绕线之间相对位置的影响，这时模型中还应包含理想电容元件。图 1.3 表示线圈在不同条件下的理想模型。

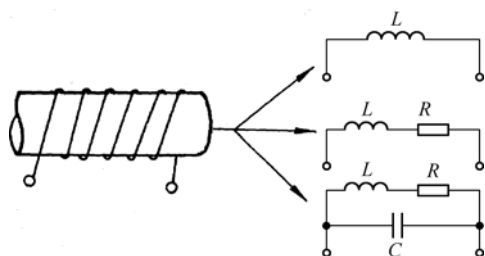


图 1.3 实际电感的不同模型

通常，当实际电路的几何尺寸远小于电路工作时电磁波长时，可以认为元件的参数都“集总”在一个点上，形成所谓的集总参数元件。理想元件是抽象的模型，没有体积大小，是集总参数元件。由集总参数元件构成的电路称为集总参数电路。我们用能足够精确反映其电磁性质的一些理想电路元件或它们的组合来模拟实际元件。

在集总参数电路中，电路元件的电能消耗及电能、磁能的储存等现象可以分开研究，而且这些电磁过程都集中在元件的内部进行，任何时刻该电路任何地方的电流、电压都是与空间位置无关的确定值。

本书只讨论集总参数电路。后面所说的“元件”、“电路”均指理想化的集总参数的元件和电路。

1.2.2 信号的基本概念

在当今的信息化社会，人们无时无刻不在使用信号传递各种各样的消息。一般用某种方式传递的文字、符号、数据、声音、图片或图像等都称为消息(Message)。例如，电报中传送的报文，电话中传送的话音，传真系统传送的图文，广播电台传送的新闻、音乐，电视系统传送的图像等。我们从所传递的消息中提取各种有用信息(Information)。但是信息的传递都不是直接的，它必须借助一定形式的信号，才能远距离快速传输并进行各种处理。

什么是信号(Signal)呢？广义地说，任何随时间变化的物理量都可以看做一种信号，信号是运载消息的工具，是消息的载体，人们真正感兴趣的是内含于信号中的信息。这就是说，信号是信息的载体，是信息的表现形式；信息内含于信号，是信号表达的具体内容。具体地讲，信号包含光信号、声信号和电信号等。例如，古代人利用点燃烽火台而产生的滚滚狼烟，向远方军队传递敌人入侵的消息，这属于光信号；当我们说话时，声波传递到他人的耳朵，使他人了解我们的意图，这属于声信号；遨游太空的各种无线电波、四通八达的电话网中的电流等，都可以用来向远方表达各种消息，这属于电信号。人们通过对光、声、电信号进行接收，才知道对方要表达的信息。信号分析的目的就是要从信号中提取信息，即从所获得的消息中，通过减少不确定性获取知识。

在众多的可以作为信号的物理量中,电量容易产生、传输和控制,同时和非电量之间的转换也比较容易,因而成为现今应用最广的信号。本书仅讨论电信号,并把它简称为信号。它通常是指随时间变化的电压或电流,在某些情况下也可以是磁通或电荷等。

信号是随时间变化的,在数学上信号可以用函数表示。因此,可以把信号与函数等同起来看待。

按照函数变化规律确定与否,信号可分为确定性信号和随机信号。如果信号的变化规律是确定的,能用确定的数学函数表示,即对任一确定的时间(或空间),信号有确定的函数值,则称其为确定性信号,如大家熟知的正弦信号。相反,如果信号的变化规律是随机的,不能用确定的数学函数表示,只能用统计规律来描述其随机特性,则称其为随机信号,如各种噪声、随机正弦函数等。本书只研究确定性信号的分析,它也是随机信号分析的基础。图1.4给出了几种简单信号的波形,其中图1.4(a)是确定性信号,而图1.4(b)是随机信号。

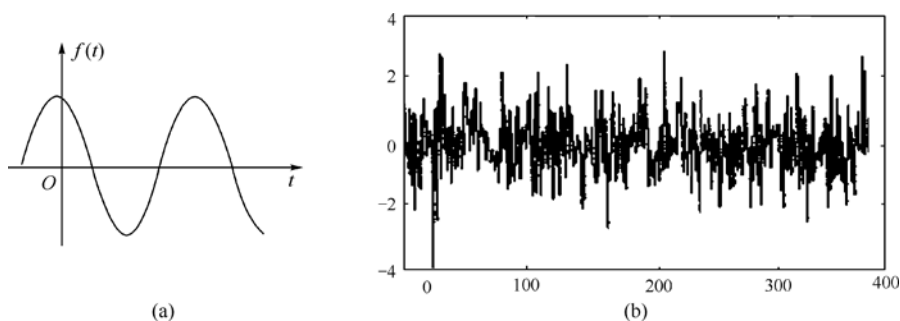


图 1.4 确定性信号与随机信号

按照函数是否具有周期性,信号可以分为周期信号和非周期信号。周期信号是以一定时间间隔周而复始、循环往复变化的信号,只要给出信号在一个周期内的变化规律,便可确知它在任一时刻的数值。如图1.5(a)所示的是周期信号,图1.5(b)所示为非周期信号。

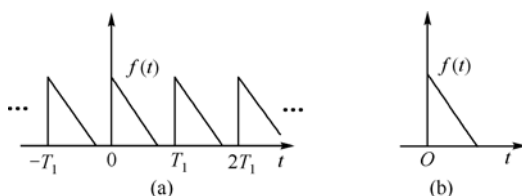


图 1.5 周期信号和非周期信号

按照函数自变量取值的连续与否,信号又可以分为连续时间信号和离散时间信号。在所讨论的任意时刻,函数都有确定的值与之对应,这种信号称为连续时间信号。而离散时间信号在时间上是离散的,它只在某些时间的离散点上给定函数值,而在其他时间点上没有定义。如图1.6(a)所示的是连续时间信号,图1.6(b)则为离散时间信号。

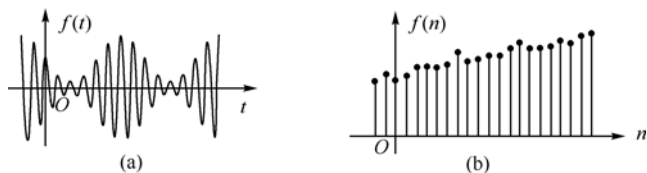


图 1.6 连续时间信号和离散时间信号

信号可以从时间特性和频率特性两个方面来描述。信号的时间特性可以用时间域的数学表达式即时域函数来描述,也可以用函数图像即信号波形来直观表示。信号的时间特性通常通过信号的形状、出现时间的先后、持续时间的长短、随时间变化的快慢、重复周期的大小等信息来表示。信号除了可以用数学表达式和波形来表示时域特性外,还可以用频域特性来描述,即应用相应的正交变换,如傅

里叶变换、拉普拉斯变换、Z 变换等工具将信号从时间域变换到频率域，分析信号由哪些频率成分构成、每个频率分量所占的比例、主要频率分量占有的频带范围等。信号的频域特性与时域特性之间有着密切的关系，在后续的章节中我们将深入地学习和讨论。

1.2.3 系统的基本概念

系统是由若干相互依赖和相互作用的事物组合而成的具有特定功能的有机整体。系统涉及的范围十分广泛，这一定义包含着极其丰富的内涵，不仅包括了诸如通信、电力、水力、机械、计算机等物理系统以及财政、金融、交通、信息管理、生态、教育等社会、经济、文化系统，甚至还包含了高科技的宇宙飞船系统、人造卫星系统、自然界中的太阳系统、人的神经系统等。本课程只讨论电路系统。

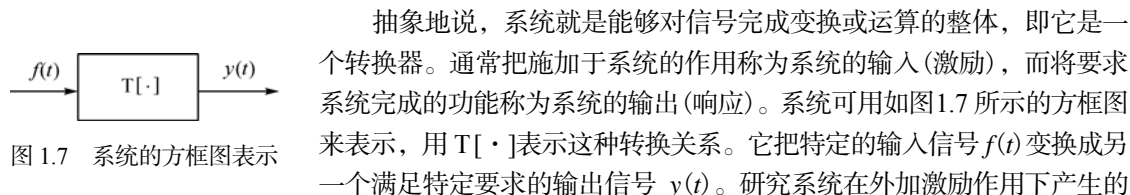


图 1.7 系统的方框图表示

抽象地说，系统就是能够对信号完成变换或运算的整体，即它是一个转换器。通常把施加于系统的作用称为系统的输入(激励)，而将要求系统完成的功能称为系统的输出(响应)。系统可用如图1.7所示的方框图来表示，用 $T[\cdot]$ 表示这种转换关系。它把特定的输入信号 $f(t)$ 变换成另一个满足特定要求的输出信号 $y(t)$ 。研究系统在外加激励作用下产生的

响应称为系统分析；而研究在特定的某种激励下，如何设计一个系统使其产生期望的响应称为系统综合，本书的侧重点是系统分析。

要想对系统有比较透彻的理解，首先需要对实际系统建立规范化的数学模型，数学模型的建立要用到具体物理系统所涉及的相关知识，并且在一定的假设条件下，突出主要矛盾，忽略次要矛盾的基础上近似得到，然后运用数学方法对其进行求解，最后回到实际系统对结果做出物理解释。

系统分类有多种方法。常用的方法有两种：一是按输入/输出特性分类；二是按系统特性分类。

若系统的输入信号和输出信号均为连续时间信号，则这样的系统称为连续时间系统，简称连续系统。如各种实时信号的采集、放大和处理电路就属于连续时间系统。若系统的输入信号和输出信号均为离散时间信号，则这样的系统称为离散时间系统，简称离散系统。数字计算机就是典型的离散时间系统。由连续时间系统与离散时间系统组合而成的系统称为混合系统。连续时间系统用微分方程描述，离散时间系统用差分方程描述。

信号、电路与系统之间存在着密切的联系，是相互作用的整体。信号作为待传递消息的表现形式，是运载消息的工具，需要由电路或系统来实现传输或加工，离开了信号，电路和系统将失去意义；同样，电路或系统也离不开信号，电路或系统的重要功能就是对信号进行加工、变换与处理。没有信号，电路和系统就没有存在的意义。从传输的观点来看，信号通过电路或系统后，由于电路或系统的作用使信号的时间特性和频率特性发生变化，从而产生新的信号。从系统响应的观点来看，系统在信号的激励下，将必然做出相应的反应，从而完成相应的功能。

近年来，大规模集成电路技术的发展以及各种复杂系统部件的直接采用，给系统与电路等名词的划分带来了困难。有时认为系统比电路更复杂，规模更大。然而确切地说，系统和电路的主要差异体现在处理问题的角度和观察问题的着眼点不同，系统关注的是全局，而电路则关注局部。例如，在有一个电阻和电容组成的简单电路中，对于电路分析，注重的是各支路、回路的电流和电压；而从系统的角度来看，可以研究它如何构成微分或积分功能的运算器。

因此在实际应用中，信号与系统必须成为相互协调的整体，才能实现信号与系统各自的功能。

1.3 电路的基本变量

在电路分析中,电流、电压、功率与能量是描述电路工作状态和特性的变量,一般都是时间的函数。其中人们所关心的物理量有电流和电压,它们是电路分析中最常用的两个基本变量。在具体展开分析和讨论之前,建立和深刻理解与这些电路基本变量相关的概念是非常重要的。本节重点讨论电流、电压的定义和参考方向,以及电路功率和能量的计算。

1.3.1 电流及其参考方向

电荷有规则的定向运动,形成传导电流。虽然看不见摸不着,但人们可通过电流的各种效应(如磁效应、热效应)来感觉它的客观存在。所以,毫无疑问,电流是客观存在的物理现象。

电流的强弱用单位时间内通过导体横截面的电荷量定义。设在 dt 时间内通过导体某一横截面的电荷量为 $dq(t)$, 通过该截面的电流为 $i(t)$, 则

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (1.1)$$

若 $dq(t)/dt$ 为常数,即是直流电流,用大写字母 I 表示,这时通过导体的横截面的电荷量 q 与时间 t 成正比,即

$$I = \frac{q}{t} \quad (1.2)$$

在国际单位制中,电流的单位是安培(A),简称“安”。电力系统中嫌安培单位小,有时取千安(kA)为电流的单位。而无线电系统中(如晶体管电路中)又嫌安培这个单位太大,常用毫安(mA)、微安(μ A)作电流单位。它们之间的换算关系是

$$1 \text{ kA} = 10^3 \text{ A}$$

$$1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$$

$$1 \text{ }\mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$$

电流不但有大小,而且有方向。我们规定正电荷运动的方向为电流的真实方向。在一些很简单的电路中,电流的实际方向是显而易见的,它是从电源正极流出,流向电源负极的。对于比较复杂的直流电路,往往事先不能确定电流的实际方向;对于交流电,其电流的实际方向是随时间而改变的。为分析方便,需引入电流的参考方向这一概念。参考方向是人们任意选定的一个方向,在电路图中用箭头表示。当然,所选的电流参考方向不一定就是电流的实际方向。当所设的电流参考方向与实际方向一致时,电流为正值($i > 0$);当所设的电流参考方向与实际方向相反时,电流为负值($i < 0$)。这样,在选定的电流参考方向下,根据电流的正负,就可以确定电流的实际方向,如图1.8所示。电流虽是代数量,但其数值的正负只有与参考方向的假定相对应才有明确的物理意义。所以在分析电路时,首先要假定电流的参考方向,并以此为标准去分析计算,最后从答案的正负值来确定电流的实际方向。



图 1.8 电流参考方向

今后若无特殊说明,就认为电路图上所标箭头是电流的参考方向。

1.3.2 电压及其参考方向

将单位正电荷从 a 点移至 b 点电场力做功的大小称为 a、b 两点间的电位差，即 a、b 两点间的电压。用符号 $u(t)$ 表示，即

$$u(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)} \quad (1.3)$$

式中 $dq(t)$ 为由 a 点移至 b 点的电荷量，单位为库仑 (C)； $dw(t)$ 是为移动电荷 $dq(t)$ 电场力所做的功，单位为焦耳 (J)。电位、电压的单位都是伏特 (V)，1V 电压相当于为移动 1C 正电荷电场力所做的功为 1J。在电力系统中嫌伏特单位小，有时用千伏 (kV)。在无线电路中嫌伏特单位太大，常用毫伏 (mV)、微伏 (μV) 作电压单位。它们之间的换算关系是

$$1 \text{ kV} = 10^3 \text{ V}$$

$$1 \text{ mV} = 10^{-3} \text{ V}$$

$$1 \mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V}$$

电压大小、方向均恒定不变时为直流电压，常用大写 U 表示。这种情况下，电场力做的功与电荷量成正比，即

$$U = \frac{w}{q} \quad (1.4)$$

电压的实际方向规定为从高电位点指向低电位点，是电位真正降低的方向。电位、电压都是代数量，也有参考方向问题。和电流一样，电路中两点间的电压也可任意选定一个参考方向。所谓电压参考方向，就是所假设的电位降低的方向，在电路图中用“+”、“-”号标出，“+”表示参考极性的 高电位端，“-”表示参考极性的低电位端，如图 1.9 所示。参考方向和电压的正负值来反映该电压的实际方向。当电压的参考方向与实际方向一致时，电压为正 ($u > 0$)；相反时，电压为负 ($u < 0$)。

也可以用带下脚标的字母表示。如电压 u_{ab} ，脚标中第一个字母 a 表示假设电压参考方向的正极性端，第二个字母 b 表示假设电压参考方向的负极性端。同电流参考方向一样，不标注电压参考方向的情况下，电压的正负是毫无意义的，所以求解电路时必须首先要假定电压的参考方向。

对一个元件或一段电路上的电压、电流的参考方向可以分别独立地任意指定，但为了方便，常常采用关联参考方向，即电流的参考方向和电压的参考方向一致，如图 1.10(a) 所示。这时在电路图上只需标明电流参考方向或电压参考极性中的任何一种即可。电流、电压参考方向相反时称为非关联参考方向，如图 1.10(b) 所示。

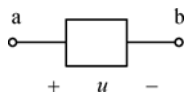


图 1.9 电压参考方向

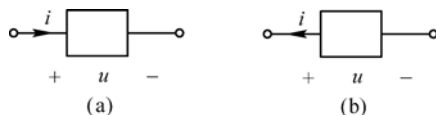


图 1.10 电流、电压的关联与非关联参考方向

1.3.3 电路中的电位

电位是在电场中定义的概念。电场力把单位正电荷从电路中某点移到参考点所做的功称为该点的电位，用大写字母 V 表示，单位是伏特 (voltage)。电位是相对的，与参考点 (即零电位点) 的选择有关，电路中某点的电位等于该点与参考点之间的电压，即两点间的电压等于这两点的电位的差。

为了确定电路中各点的电位，就必须在电路中选择 一个参考点。它们之间的关系如下：

(1) 参考点的电位为零, 即 $V_o=0$, 比该点高的电位为正, 比该点低的电位为负。如图1.11 (a) 所示的电路中, 选取 o 点为参考电位点, 则 a 点的电位为正, b 点的电位为负。

(2) 其他各点的电位为该点与参考点之间的电位差。如图1.11 (a) 中 a、b 两点的电位分别为

$$V_a = V_a - V_o = u_{ao} = 1 \text{ V}$$

$$V_b = V_b - V_o = u_{bo} = -2 \text{ V}$$

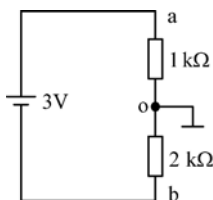
(3) 参考点选取不同, 电路中各点的电位也不同, 但任意两点间的电位差(电压)不变。如选取 b 点为参考点, 如图1.11 (b) 所示, 则

$$V_b = 0$$

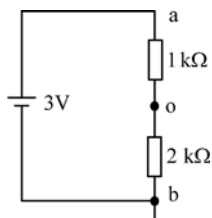
$$V_a = V_a - V_b = u_{ab} = 3 \text{ V}$$

但 a、b 两点间的电压不变, 仍然为 $u_{ab} = 3 \text{ V}$ 。

(4) 在研究同一电路系统时, 只能选取一个电位参考点。电位概念的引入给电路分析带来了方便, 因此, 在电子线路中往往不再画出电源, 而改用电位标出。图1.12 是电路的一般画法与电子线路的习惯画法示例。

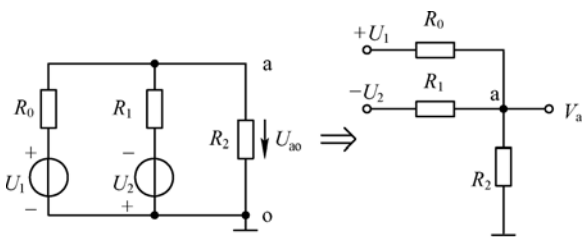


(a)

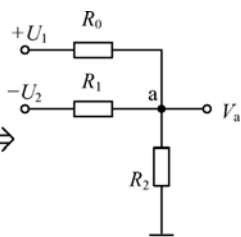


(b)

图 1.11 电位的计算



(a)



(b)

图 1.12 电路的一般画法与习惯画法

例 1.1 如图1.13 所示电路, 已知, $R_0=R_1=2 \text{ k}\Omega$, $R_2=8 \text{ k}\Omega$, 求开关 S 打开闭合时各点的电位。

解: 当 S 打开时, $V_e=0 \text{ V}$, $V_a=16 \text{ V}$ 。因为电阻上没有电流流过, 所以没有电压降, 故 $V_a=V_b=V_c=V_d=16 \text{ V}$;

当 S 闭合时, $V_a=16 \text{ V}$, 由于 R_2 上仍然没有电流流过, 故有

$$V_b = V_c = \frac{2}{2+2} \times 16 \text{ V} = 8 \text{ V}$$

此时, $V_d = V_e = 0 \text{ V}$ 。

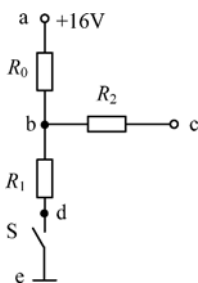


图 1.13 例 1.1 图

1.3.4 电路中的功率和能量

单位时间内做功的大小称做功率, 也称为做功的速率。在电路问题中涉及的电功率即是电场力做功的速率, 以符号 $p(t)$ 表示。功率的数学定义式可写为

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} \quad (1.5)$$

式中 $dw(t)$ 为 dt 时间内电场力所做的功。功率的单位为瓦(W)。1 瓦功率就是每秒做功 1 焦耳, 即 $1\text{W} = 1 \text{ J/s}$ 。

当电压电流参考方向关联时, 得

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = ui \quad (1.6)$$

如果元件电压电流取非关联参考方向, 可以把电压或电流看成关联参考方向时的负值, 只需在式(1.6)中冠以负号, 即

$$p(t) = -ui \quad (1.7)$$

其计算结果的意义与式(1.6)相同。

根据电压电流参考方向是否关联, 可以选择不同的公式计算功率, 但不论使用哪个公式, 都是计算的吸收功率。当 $p > 0$ 时, 表示 dt 时间内电场力对电荷 dq 做功 dw , 这部分能量被元件吸收, 所以 p 是元件的吸收功率; 在 $p < 0$ 时, 表示元件吸收负功率, 实际上是该元件向外电路提供功率或产生功率。

在直流情况下, 电压和电流都是常数, 则式(1.6)和(1.7)可分别改写为

$$P = UI \quad (1.8)$$

$$P = -UI \quad (1.9)$$

若已知元件吸收功率为 $p(t)$, 并设 $w(-\infty) = 0$, 则对式(1.5)从 $-\infty$ 到 t 积分, 可求得从 $-\infty$ 到 t 的时间内元件吸收的能量 (u 、 i 为关联参考方向) 为

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t u(\xi) i(\xi) d\xi \quad (1.10)$$

如果对于任意时刻 t , 均有 $w(t) \geq 0$, 则称该元件(或电路)是无源元件, 否则就称其为有源元件。所以, 无源元件是指在接入任一电路进行工作的全部时间范围内, 总的输入能量不为负值的元件; 而有源元件在它接入电路进行工作的某个时刻 t , $w(t) < 0$, 即供出能量, 甚至任何时刻一直供出能量。

例 1.2 如图 1.14 所示电路, 方框分别代表一个元件, 各电压、电流的参考方向均已设定。已知 $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = -1 \text{ A}$, $I_3 = -1 \text{ A}$, $U_1 = 7 \text{ V}$, $U_2 = 5 \text{ V}$, $U_3 = 4 \text{ V}$, $U_4 = -3 \text{ V}$, $U_5 = 8 \text{ V}$ 。求各元件吸收或向外提供的功率。

解: 元件 2、3、4 的电压、电流为关联方向,

$$P_2 = U_2 I_3 = 5 \times (-1) = -5 \text{ W}$$

$P_2 < 0$, 表明元件 2 向外提供功率。

$$P_3 = U_3 I_1 = 4 \times 2 = 8 \text{ W}$$

$$P_4 = U_4 I_2 = (-3) \times (-1) = 3 \text{ W}$$

$P_3 > 0$, $P_4 > 0$, 表明元件 3、4 均吸收功率。

元件 1、5 的电压、电流为非关联方向。

$$P_1 = -U_1 I_1 = -7 \times 2 = -14 \text{ W}$$

$P_1 < 0$, 表明元件 1 向外提供功率。

$$P_5 = -U_5 I_3 = -8 \times (-1) = 8 \text{ W}$$

$P_5 > 0$, 表明元件 5 吸收功率。

电路向外提供的总功率为

$$P_{\text{供}} = P_1 + P_2 = 5 + 14 = 19 \text{ W}$$

电路吸收的总功率为

$$P_{\text{吸}} = P_3 + P_4 + P_5 = 8 + 8 + 3 = 19 \text{ W}$$

计算结果表明对于任何完整的电路, 吸收功率等于供出功率, 这正是能量守恒定律的具体体现。

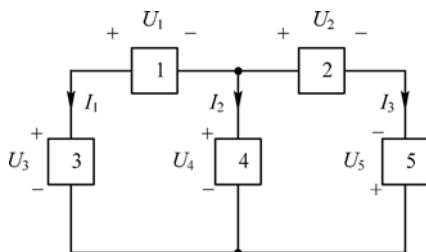


图 1.14 例 1.2 图

1.4 电路的基本元件

电路元件是组成电路的最基本元件,它通过端子与外部连接,元件的特性通过与端子有关的物理量描述,每种元件都反映某种确定的电磁特性,具有精确的数学定义和特定的表示符号以及不同于其他元件的特性。

根据能量特性,电路元件可以分为有源元件和无源元件,根据与外部电路连接的端子数目分为二端、三端或四端元件等,还可以分为线性和非线性元件、时变元件和非时变元件等。

基本的无源元件有电阻、电感和电容,这三种元件都是二端元件。有源元件有独立电源和受控电源。

了解元件的特性,也就是要了解它端子上的电压与电流之间的关系,把这种关系称为元件的伏安特性,即 VCR (Voltage Current Relation)。伏安特性决定了元件在电路中的表现。

1.4.1 电阻元件

一个二端元件,如果在任意时刻 t , 其 VCR 能用 $u-i$ 平面(或 $i-u$ 平面)上的曲线所确定,就称其为二端电阻元件,简称电阻元件。它是实际电路中的电灯泡、电炉、滑杆电阻器、半导体二极管等所有消耗能量的器件的理想化模型。

如果电阻元件的伏安关系不随时间变化(即它不是时间的函数),则称其为时不变(或非时变)的,否则称为时变的。如其伏安特性是通过原点的直线,则称为线性的,否则称为非线性的。本书涉及最多的是线性时不变电阻元件。

线性时不变电阻元件的伏安特性是 $u-i$ 平面上一条通过原点的直线,如图1.15(b)所示。

在电压、电流参考方向相关联(见图1.15(a))的条件下,其电压与电流的关系就是熟知的欧姆定律,即

$$u(i) = Ri(t) \quad (1.11)$$

或写为

$$i(t) = Gu(i) \quad (1.12)$$

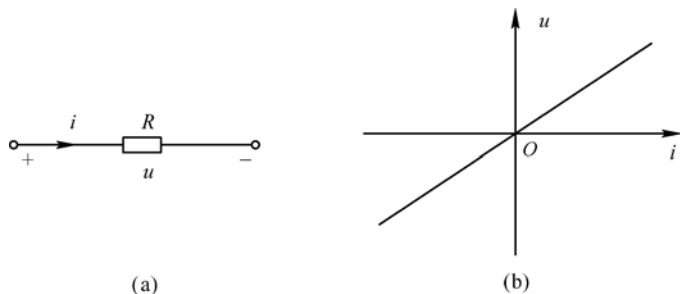


图 1.15 线性时不变电阻及伏安特性

式中 R 为元件的电阻,单位为欧姆,简称欧(Ω),该式表明在一定电压下,电阻 R 越大,电流 i 越小,所以电阻 R 是表征电阻元件对电流阻碍程度的参数; G 是元件的电导,单位为西门子,简称西(S),该式表明在一定电压下,电导 G 越大,电流 i 越大,所以电导 G 是表征电阻元件对电流传导程度的参数;电阻 R 和电导 G 是联系电阻元件的电压与电流的电气参数。对于线性时不变电阻元件, R 和 G 都是与电压、电流无关的常量,它们的关系是

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.13)$$

对线性电阻当 $R=\infty$ 或 $G=0$, 称为开路, 其伏安特性曲线与 u 轴重合, 此时无论端电压为何值, 其端电流恒为零; 当 $R=0$ 或 $G=\infty$, 称为短路, 其伏安特性曲线与 i 轴重合, 电阻元件相当于一段理想导线, 此时无论端电流为何值, 其端电压恒为零。开路和短路时, 其电路符号及伏安特性分别如图 1.16(a)、(b) 所示。

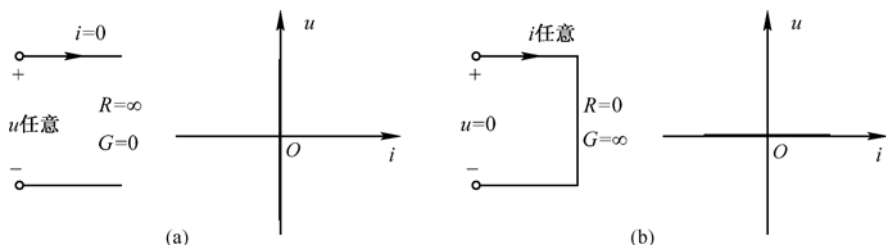


图 1.16 开路、短路的符号及伏安特性

在这样的电阻、电导上, t 时刻的电压(或电流)只与 t 时刻的电流(或电压)有关。这说明电阻、电导上的电压(或电流)不能记忆 t 时刻以前电流(或电压)的“历史”作用。所以说电阻、电导元件是无记忆性元件, 又称即时元件。

根据式(1.6)和欧姆定律, 可得电阻 R 的吸收功率为

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2 \quad (1.14)$$

从式(1.14)可以看出, 电阻元件的功率与通过的电流的平方或端电压的平方成正比, 其功率恒大于零。因此, 电阻元件是一个只消耗电能而非储存电能的元件, 称为耗能元件。

作为理想元件, 电阻元件上的电压、电流可以不受限制地满足欧姆定律。但在实际使用中还应该考虑电气元件、设备的额定值问题, 实际使用中超过额定值运行, 会使设备、元件缩短使用寿命或遭致毁坏而造成事故。例如一个标有 $1/4 \text{ W}$ 、 $10 \text{ k}\Omega$ 的电阻, 表示该电阻的阻值为 $10 \text{ k}\Omega$ 、额定功率为 $1/4 \text{ W}$, 由 $p=I^2R$ 的关系, 还可求得它的额定电流为 5 mA 。上述电阻在使用电流超过 5 mA 时, 将使电阻因过热而损坏。

例 1.3 图 1.17 电路, 已知 $R=5 \text{ k}\Omega$, $U=-10 \text{ V}$, 求电阻中流过的电流和电阻的吸收功率。

解: 由于电阻上电流电压为非关联参考方向, 因此按欧姆定律, 其电流

$$I = -\frac{U}{R} = -\frac{(-10)}{5 \times 10^3} = 2 \times 10^{-3} \text{ A} = 2 \text{ mA}$$

注意上面算式中公式前面的负号与算式括号中的负号, 其含义是不同的, 前者表示 R 中电流电压参考方向非关联, 后者表示 R 上电压参考方向与实际方向相反。电阻的吸收功率为

$$P = -UI = -(-10) \times 2 \times 10^{-3} = 20 \times 10^{-3} \text{ W} = 20 \text{ mW}$$

或者

$$P = RI^2 = 5 \times 10^3 \times (2 \times 10^{-3})^2 = 20 \text{ mW}$$

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(-10)^2}{5 \times 10^3} = 20 \text{ mW}$$

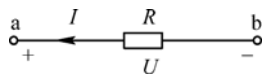


图 1.17 例 1.3 图

1.4.2 电容元件

一个二端元件, 如果在任意时刻 t , 其所积累的电荷 $q(t)$ 与端电压 $u(t)$ 之间的关系能用 $q-u$ 平面上的一条曲线所确定, 就称其为电容元件。电容器是最常用的存储电能的器件, 将两片金属极板中间填充电介质, 就可以构成一个简单的实际电容器。

如果约束电容的 $q-u$ 平面上的曲线不随时间变化(即它不是时间的函数), 则称其为时不变(或非时变)的, 否则称为时变的。如曲线是通过原点的直线如图1.18(b)所示, 则称为线性的, 否则称为非线性的。本书主要讨论线性时不变电容元件。

对线性非时变电容, 电荷量 q 与其端电压 u 的关系为

$$q(t) = Cu(t) \quad (1.15)$$

式中 C 称为电容元件的电容量, 单位为法拉, 简称法(F)。它是一个与 q 、 u 和 t 无关的正值常量, 是表征电容元件积聚电荷能力的物理量。

在电路分析中, 关心的是元件的伏安特性。若电容端电压 u 与通过的电流 i 采用关联参考方向, 如图1.18(a)所示, 则有

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (1.16)$$

将式(1.16)改写为

$$du(t) = \frac{1}{C} i(t) dt \quad (1.17)$$

对式(1.17)从 $-\infty$ 到 t 进行积分, 并设 $u(-\infty)=0$, 得

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \quad (1.18)$$

式(1.16)和(1.18)分别称为电容元件伏安关系的微分形式和积分形式。表明电容的电压与以前所有时刻流过电容的电流有关, 电容具有“记忆”电流的作用。

设 t_0 为初始时刻, 时刻 t_0 以后电容上电压电流的关系为

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \\ &= u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.19)$$

$u(t_0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\xi) d\xi$ 称为电容元件的初始电压。由下面讨论可知, $u(t_0)$ 反映了电容在初始时刻的储能状况, 故也称为初始状态。

在电压、电流参考方向关联的条件下, 电容元件的吸收功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} \quad (1.20)$$

电容元件所储存的能量为其从 $-\infty$ 到 t 时刻所吸收的能量

$$\begin{aligned} w_C(t) &= \int_{-\infty}^t p(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t Cu(\xi) \frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi = \int_{u(-\infty)}^{u(t)} Cu(\xi) du(\xi) \\ &= \frac{1}{2} Cu^2(t) - \frac{1}{2} Cu^2(-\infty) \end{aligned} \quad (1.21)$$

一般可以认为 $u(-\infty)=0$, 得电容的储能为

$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t) \geq 0 \quad (1.22)$$

对电容元件, 我们可以看到:

(1) 伏安关系的微分形式表明, 任何时刻, 通过电容元件的电流与该时刻的电压变化率成正比。

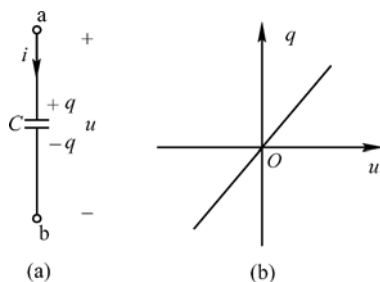


图 1.18 线性电容

如果电容两端加直流电压, 电压恒定不变, 其变化率为零, 则电流 $i=0$, 电容元件相当于开路。故电容元件有隔断直流的作用。在实际电路中, 某一时刻电容的电流 i 为有限值, 这意味着 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ 必须为有限值, 也就是说, 电容两端电压 u 必定是时间 t 的连续函数, 而不能跃变。这从数学上可以很好地理解, 当函数的导数为有限值时, 其函数必定连续。

(2) 伏安关系的积分形式表明, 任意时刻 t 的电容电压与该时刻以前电流的“全部历史”有关。或者说, 电容电压“记忆”了电流的作用效果, 故称电容为记忆元件。与此不同, 电阻元件任意时刻 t 的电压值仅取决于该时刻电流的大小, 而与它的历史情况无关, 因此电阻为无记忆元件。

(3) 由式(1.22)可知, 任意时刻 t , 电容的储能只取决于该时刻的电容电压值, 恒有 $w_C(t) \geq 0$, 故电容元件是储能元件而不是耗能元件, 它从外部吸收的能量以电场能量形式储存于自身的电场中。

(4) 电容元件上的电压、电流关系是微积分关系, 因此电容元件是动态元件。而电阻元件上的电压、电流关系是代数关系, 所以它是即时元件。

例 1.4 图 1.19(a) 所示电路中, 电容 $C=0.5\ \mu\text{F}$, 电压 u 的波形如图 1.19(b) 所示。求电容电流 i , 并绘出其波形。

解: 由电压 u 的波形, 应用电容元件的元件约束关系, 可求出电流 i 。

当 $0 \leq t \leq 1\ \mu\text{s}$, 电压 u 从 $0\ \text{V}$ 均匀上升到 $10\ \text{V}$, 其变化率为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{10-0}{1 \times 10^{-6}} = 10 \times 10^6\ \text{V/s}$$

由式(1.16)可得

$$i = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0.5 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^6 = 5\ \text{A}$$

当 $1\ \mu\text{s} \leq t \leq 3\ \mu\text{s}$, $5\ \mu\text{s} \leq t \leq 7\ \mu\text{s}$ 及 $t \geq 8\ \mu\text{s}$ 时, 电压 u 为常量, 其变化率为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

故电流

$$i = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0\ \text{A}$$

当 $3\ \mu\text{s} \leq t \leq 5\ \mu\text{s}$ 时, 电压 u 由 $10\ \text{V}$ 均匀下降到 $-10\ \text{V}$, 其变化率为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{-10-10}{2 \times 10^{-6}} = -10 \times 10^6\ \text{V/s}$$

故电流

$$i = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0.5 \times 10^{-6} \times (-10 \times 10^6) = -5\ \text{A}$$

当 $7\ \mu\text{s} \leq t \leq 8\ \mu\text{s}$ 时, 电压 u 由 $-10\ \text{V}$ 均匀上升到 $0\ \text{V}$, 其变化率为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{0-(-10)}{1 \times 10^{-6}} = 10 \times 10^6\ \text{V/s}$$

故电流

$$i = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0.5 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^6 = 5\ \text{A}$$

根据分析和计算, 画出电容电流 i 的波形如图 1.19(c) 所示。

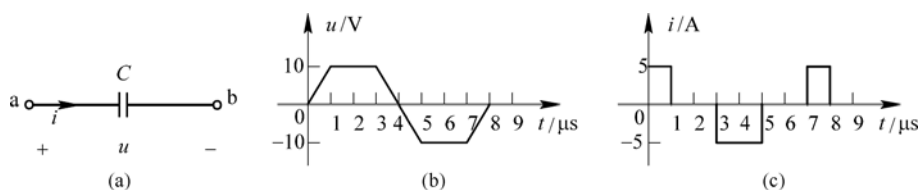


图 1.19 例 1.4 图

1.4.3 电感元件

一个二端元件,如果在任意时刻 t , 其磁链 $\psi(t)$ 与电流 $i(t)$ 的关系能用 $\psi-i$ 平面上的曲线确定, 就称其为电感元件。电感是最常用的存储磁能的器件, 把导线绕成线圈就构成实际的电感元件。

如果约束电感的 $\psi-i$ 平面上的曲线不随时间变化(即它不是时间的函数), 则称其为时不变(或非时变)的, 否则称为时变的。如曲线是通过原点的直线, 则称为线性的, 如图 1.20(b) 所示, 否则称为非线性的。本书主要讨论线性时不变电感元件。

设磁链 $\psi(t)$ 与电流 $i(t)$ 的参考方向满足右手螺旋定则, 磁链与电流的关系为

$$\psi(t) = Li(t) \quad (1.23)$$

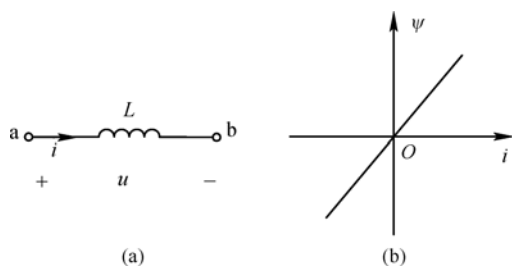


图 1.20 线性电感

式中 L 为电感元件的电感量, 单位为亨利, 简称亨(H)。它是一个与 ψ 、 i 和 t 无关的正值常量, 是表征电感元件产生磁链能力的物理量。

在电路分析中, 关心的是元件的伏安特性。若电感端电压 u 与通过的电流 i 采用关联参考方向, 如图 1.20(a) 所示, 由电磁感应定律, 可得

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.24)$$

将式(1.24)改写为

$$di(t) = \frac{1}{L} u(t) dt \quad (1.25)$$

对式(1.25)从 $-\infty$ 到 t 进行积分, 并设 $i(-\infty) = 0$, 得

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \quad (1.26)$$

式(1.24)和(1.26)分别称为电感元件伏安关系的微分形式和积分形式。表明电感的电流值与以前所有时刻电感的电压有关, 电感具有“记忆”电压的作用。

设 t_0 为初始时刻, 时刻 t_0 以后电感上电流的关系为

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \\ &= i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.27)$$

$i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u(\xi) d\xi$ 称为电感元件的初始电流。由下面讨论可知, $i(t_0)$ 反映了电感在 t_0 时刻的储能状况, 故也称为初始状态。

在电压、电流参考方向关联的条件下,电感元件的吸收功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (1.28)$$

电感元件所储存的能量为其从 $-\infty$ 到 t 时刻所吸收的能量

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \int_{-\infty}^t p(\xi) d\xi = L \int_{-\infty}^t i(\xi) \frac{di(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= L \int_{i(-\infty)}^{i(t)} i(\xi) di(\xi) = \frac{1}{2} Li^2(t) \end{aligned} \quad (1.29)$$

一般可以认为 $i(-\infty) = 0$, 得电感的储能为

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \geq 0 \quad (1.30)$$

对电感元件, 我们可以看到:

(1) 伏安关系的微分形式表明, 任何时刻, 电感元件的端电压与该时刻电流的变化率成正比。当电感电流为直流时, 恒有电压 $u=0$, 电感元件相当于短路。在实际电路中, 某一时刻电感的电压 u 为有限值, 这意味着 di/dt 必须为有限值, 也就是说, 电感电流 i 必定是时间 t 的连续函数, 而不能跃变。

(2) 伏安关系的积分形式表明, 任意时刻 t 的电感电流与该时刻以前电压的“全部历史”有关, 所以电感电流具有“记忆”电压的作用, 它是一种记忆元件。

(3) 由式(1.30)可知, 任意时刻 t , 电感的储能只取决于该时刻的电感电流值, 恒有 $w_L(t) \geq 0$, 电感元件也是储能元件, 将从外部电路吸收的能量以磁场能量形式储存于元件的磁场中。

(4) 与电容元件相同, 电感元件也是一种动态元件。

例 1.5 如图 1.21(a) 所示电感元件, 已知电感量 $L=100 \text{ mH}$, 其电流 i 波形如图 1.21(b) 所示。求电感电压 u , 画出它的波形, 并计算电感吸收的最大能量。

解: 由电流 i 的波形, 应用电感元件的元件约束关系, 可求出电压 u 。

u 与 i 所给的参考方向关联, 由式(1.24)可得各段感应电压为

$$\text{当 } 0 \leq t \leq 1 \text{ ms 时, } u = L \frac{di(t)}{dt} = 100 \times 10^{-3} \times \frac{10 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3}} = 1 \text{ V}$$

$$\text{当 } 1 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms 时, 电流 } i \text{ 为常量, } u = L \frac{di(t)}{dt} = 0 \text{ V}$$

$$\text{当 } 4 \text{ ms} \leq t \leq 5 \text{ ms, } u = L \frac{di(t)}{dt} = 100 \times 10^{-3} \times \frac{0 - 10 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3}} = -1 \text{ V}$$

电感电压 u 的波形如图 1.21(c) 所示。

由式(1.30)可得电感吸收的最大能量

$$w_{L\max} = \frac{1}{2} Li_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-3} \times (10 \times 10^{-3})^2 = 5 \times 10^{-6} \text{ J}$$

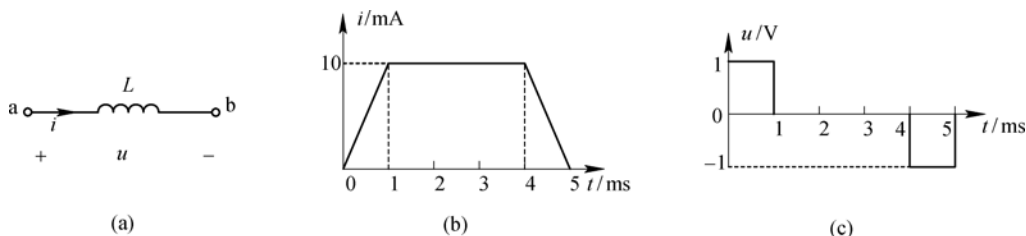


图 1.21 例 1.5 图

1.5 电源

基本的有源电路元件有电压源和电流源。根据电压源的电压值或电流源的电流值是确定值还是随其他支路的电压或电流而变化,又可将其分为独立源和受控源。

1.5.1 独立源

独立源分为独立电压源和独立电流源。

1. 独立电压源

一个二端元件,如其端口电压总能保持为给定的时间函数 $u_S(t)$ 或定值 U_S ,而与流过它的电流无关,则称其为独立电压源,简称电压源,其电路符号如图1.22(a)所示,符号中“+”、“-”表示电压的参考极性。

电压源是实际电压源忽略其内阻后的理想化模型,具有以下的特点:

(1) 端电压保持给定时间函数 $u_S(t)$ 的电压源称为时变电压源,如图1.22(b)所示,其特性曲线是一条平行于 i 轴但却随时间改变的直线, u 轴上的截距表示不同时刻时变电压源的电压值;端电压保持定值 U_S 的电压源称为直流电压源,如图1.22(c)所示,其特性曲线是一条平行于 i 轴的直线, u 轴截距 U_S 表示直流电压源的电压值。

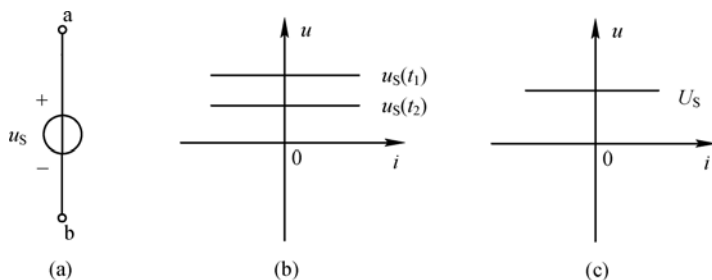


图 1.22 电压源

若 $u_S(t) = 0$ 或 $U_S = 0$, 则伏安特性曲线与 i 轴重合,电压源相当于短路。

(2) 电压源的端电压由它自身决定,与通过它的电流无关。

(3) 流经电压源的电流由电压源及与其相连的外电路共同决定,或者说它的输出电流随外电路变化。

电流可以不同的方向流过电源,因此理想电压源可以对外电路提供能量(起电源作用),也可以从外电路接受能量(当做其他电源的负载),这要看流经理想电压源电流的实际方向而定。理论上讲,在极端情况下,独立电压源可以供出无穷大能量,也可以吸收无穷大能量。

2. 独立电流源

一个二端元件,如流经它的电流总能保持为给定的时间函数 $i_S(t)$ 或定值 I_S ,而与其端口电压无关,则称其为独立电流源,简称电流源。其电路符号如图1.23(a)所示。

电流源是实际电流源忽略其内阻后的理想化模型,具有以下的特点:

(1) 流经电流源的电流保持给定时间函数 $i_S(t)$ 的电流源称为时变电流源,如图1.23(b)所示,其特性曲线是一条垂直于 i 轴但却随时间改变的直线, i 轴上的截距表示不同时刻时变电流源的电流值。流

经电流源的电流保持定值 I_S 的电流源称为直流电流源, 如图1.23(c)所示, 其特性曲线是一条垂直于 i 轴的直线, i 轴截距 I_S 表示直流电流源的电流值。

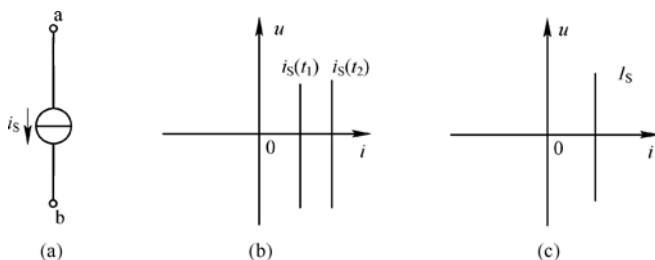


图 1.23 电流源

若 $i_s(t)=0$ 或 $I_S=0$, 则伏安特性曲线与 u 轴重合, 电流源相当于开路。

(2) 流经电流源的电流由它自身决定, 与其两端电压无关。

(3) 电流源两端电压由其本身的输出电流与外部电路共同决定。

电流源的两端的电压可以有不同的极性, 同电压源一样, 电流源可以对外电路提供能量(起电源作用), 也可以从外电路接收能量(当做其他电源的负载), 这要看电流源两端电压的极性而定。理论上讲, 在极端情况下, 独立电流源可以供出无穷大能量, 也可以吸收无穷大能量。

例 1.6 如图 1.24 所示电路, 已知 $R=5\ \Omega$, $U_S=2\text{ V}$, $I_S=1\text{ A}$ 。试求 (1) 电阻 R 两端的电压 U_1 ; (2) 1 A 电流源两端的电压 U 及功率 P 。

解: (1) 由于电阻 R 与电流源 I_S 相串联, 因此流过电阻 R 的电流就是 1 A , 而与 2 V 电压源无关, 即 $I_1=I_S=1\text{ A}$ 。所以根据欧姆定律, 可得

$$U_1 = I_1 R = 1 \times 5 = 5\text{ V}$$

(2) 1 A 电流源两端的电压包括 $5\ \Omega$ 电阻上的电压和 2 V 电压源, 因此

$$U = U_1 + U_S = 5 + 2 = 7\text{ V}$$

电流源上电压、电流为非关联参考方向, 所以 $P = -UI_S = -1 \times 7 = -7\text{ W}$, 向外提供功率。

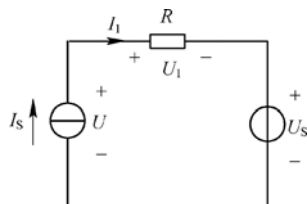


图 1.24 例 1.6 图

1.5.2 受控源

受控源就是非独立电源, 是指电压源的电压或电流源的电流不是给定的时间函数, 而是受电路中某支路电压或电流控制的。受控源是有源的四端元件, 有两个端口, 它的两个受控端构成输出端口(电源端口), 体现为源电压 u_s 或源电流 i_s , 能提供电功率; 另外两个控制端构成输入端口(控制端口), 体现为控制电压 u_c 或控制电流 i_c 。

根据受控源是电压源还是电流源, 控制量是电压还是电流, 可将受控源分为电压控制电压源 (VCVS)、电流控制电压源 (CCVS)、电压控制电流源 (VCCS) 和电流控制电流源 (CCCS) 四种类型, 分别如图1.25(a)、(b)、(c)和(d)所示。

独立源是一端口元件, 只需一个方程就可以表征其特性。而受控源是二端口元件, 其元件特性需用两个方程来描述。其输入、输出端口电压、电流关系分别为:

$$\text{电压控制电压源 (VCVS)} \quad \begin{cases} u_2 = \mu u_1 \\ i_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{电流控制电压源 (CCVS)} \quad & \begin{cases} u_2 = r i_1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \\
 \text{电压控制电流源 (VCCS)} \quad & \begin{cases} i_2 = g u_1 \\ i_1 = 0 \end{cases} \\
 \text{电流控制电流源 (CCCS)} \quad & \begin{cases} i_2 = \beta i_1 \\ u_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

式中 μ 、 r 、 g 、 β 是控制系数，其中 μ 和 β 无量纲，分别表示电压和电流的放大倍数， r 和 g 分别具有电阻和电导的量纲， r 为转移电阻， g 为转移电导。当这些系数为常数时，被控电源数值与控制量成正比，这种受控源称为线性时不变受控源。本书只涉及这类受控源。

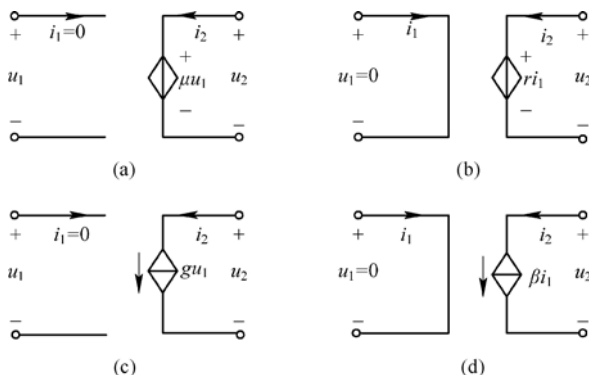


图 1.25 受控源

需要指出的是，独立源和受控源是两个不同的物理概念。独立源是电路中的输入，反映外界对电路的作用，电路中的电压和电流都是由独立源的“激励”作用而产生。而受控源则不同，它反映了电路中某支路对另一支路的控制作用，它本身不直接起“激励”作用。只有在电路已经被独立源激励，控制电压或电流已经存在时，受控源的输出端才具有一定的输出电压或电流，这是受控源与独立源的不同之处。作为有源元件，受控源除其源电压和源电流受控制量控制外，其他性质与独立源没有区别，因此在分析含有受控源的电路时，可以把受控源作为独立源来处理，但是必须注意前者的电压或电流是受控制量控制的。

受控源是某些电子器件的理想化模型。如一个处于放大状态的三极管集电极电流受基极电流的控制，此时三极管可以用 CCCS 模型表示；运算放大器的输出电压受输入电压的控制，此时运算放大器可以用 VCVS 模型表示。

1.6 基尔霍夫定律

电路性能除与电路中元件自身的特性有关外，还与这些元件的连接方式有关，或者说，它要服从来自元件特性和连接方式两方面的约束，分别称为元件约束和拓扑约束。基尔霍夫定律，包括基尔霍夫电流定律(缩写为 KCL)和基尔霍夫电压定律(缩写为 KVL)，是概括描述集总参数电路拓扑约束关系的基本定律。

为了阐述方便，先介绍几个有关的名词术语。

(1) 支路：单个二端元件或若干二端元件依次连接组成的一段无分支的电路称为支路。支路中流过的是同一个电流。如图 1.26 所示电路，包括有 abc、adc、ac 三条支路。其中 abc 支路、adc 支路分别由元件 1、2 和元件 4、5 串联构成，ac 支路由单个元件 3 构成。

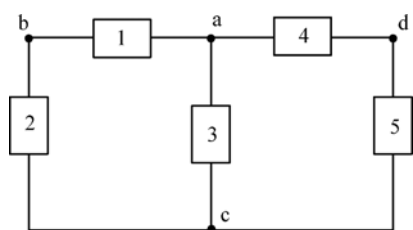


图 1.26 电路术语介绍用图

(2) 节点：电路中三条或三条以上支路的连接点称为节点。图1.26中，有支路连接点 a、c 两个节点。

(3) 回路：电路中任一闭合路径称为回路。在图1.26中，共有三个回路，闭合路径 abca、adca、abcda 都是回路。

(4) 网孔：电路内部不含有支路的回路称为网孔。图1.26所示电路中，有 abca 和 adca 两个网孔，而回路 abcda 因为内部含有支路 ac，所以不是网孔。显然，任一网孔都是回路，但回路不一定是网孔。

1.6.1 基尔霍夫电流定律

基尔霍夫电流定律(KCL)是描述电路中与各节点相连的各支路电流间相互关系的定律。它的基本内容是：对于集总参数电路的任意节点，在任意时刻流出该节点的电流之和等于流入该节点的电流之和。例如，对于如图1.27所示电路中的节点 a，有

$$i_1 + i_3 + i_5 = i_2 + i_4$$

KCL 也可表述为：对于集总参数电路中的任意节点，在任意时刻，流入或流出该节点电流的代数和等于零，即

$$\sum_{k=1}^m i_k(t) = 0$$

式中， m 为连接到某节点的支路数， $i_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) 表示该节点第 k 条支路的电流。它反映了电路中任一节点各支路电流之间的相互约束关系。

KCL 除适用于节点外，也能推广用于电路中任一假设的闭合曲面(称为广义结点)。

例如，对于图1.28所示电路，节点 a、b 和 c 相应的 KCL 方程为

$$i_1 - i_4 + i_6 = 0$$

$$i_4 - i_2 - i_5 = 0$$

$$i_3 + i_5 - i_6 = 0$$

将上列三个方程相加，得 $i_1 - i_2 + i_3 = 0$ 。若设流入 S 的支路电流取正号，流出 S 的支路电流取负号，该式正是闭合曲面 S 的 KCL 方程。所以在集总参数电路中，通过任一闭合曲面的各支路电流的代数和总是等于零，即流入闭合曲面的支路电流之和等于流出闭合曲面的支路电流之和。

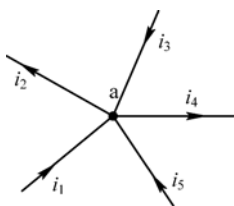


图 1.27 KCL 用图

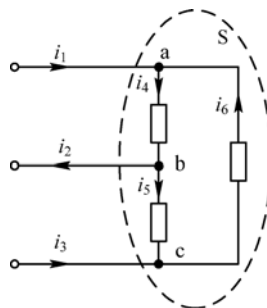


图 1.28 KCL 应用于曲面 S

基尔霍夫电流定律是电荷守恒定律和电流连续性在集总参数电路中的具体体现。也就是说电荷既不能创造，也不能消灭。对于集总参数电路中的节点，在任意时刻 t ，它的“收支”是完全平衡的，流入节点的电荷必然等于流出节点的电荷，所以 KCL 是成立的。

关于 KCL 的应用, 应再明确以下几点:

(1) KCL 适用于任意时刻、任何激励源、任何性质元件构成的一切集总参数电路。它是电路的一个普遍适用的定律。

(2) 应用 KCL 列写节点或闭合曲面电流方程时, 电流的流入和流出指的是其参考方向, 而不是其实际方向。所以首先要假设每一支路电流的参考方向, 然后根据参考方向是流入或流出取相应符号(流入者取正号, 流出者取负号, 或者反之), 依此列写出 KCL 方程。

(3) 对连接有较多支路的节点列 KCL 方程时不要遗漏了某些支路。

例 1.7 如图 1.29 所示电路, 已知 $i_1 = -5 \text{ A}$, $i_3 = 1 \text{ A}$, $i_4 = 2 \text{ A}$ 。试求 i_5 。

解: 应用 KCL, 可以有两种方法求解。

(1) 对于节点 a, 由 KCL 可知

$$-i_1 - i_2 + i_4 = 0$$

则

$$i_2 = i_4 - i_1 = 2 - (-5) = 7 \text{ A}$$

对于节点 b, 由 KCL 可知

$$i_2 + i_3 - i_5 = 0$$

则

$$i_5 = i_2 + i_3 = 7 + 1 = 8 \text{ A}$$

(2) 作封闭曲面, 列广义节点 KCL 方程进行求解。对封闭曲面 S 如图 1.29 虚线所示, 列 KCL 方程有

$$-i_1 + i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

则

$$i_5 = -i_1 + i_3 + i_4 = -(-5) + 1 + 2 = 8 \text{ A}$$

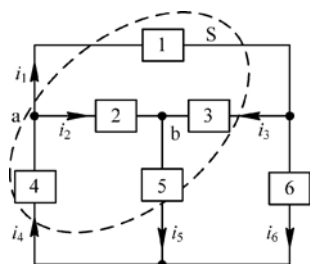


图 1.29 例 1.7 图

1.6.2 基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律(KVL)是描述回路中各支路(或各元件)电压之间约束关系的定律。它的基本内容是: 对任何集总参数电路, 在任意时刻, 沿任意闭合路径巡行, 各段电路电压的代数和恒等于零。其数学表示式为

$$\sum_{k=1}^m u_k(t) = 0$$

式中, m 为回路中包含元件的个数, $u_k(t)$ 代表回路中第 k 个元件上的电压。如图 1.30 所示电路, 对回路 A 有

$$u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 = 0$$

将上式改写为 $u_1 + u_2 + u_4 = u_3 + u_5$

此式表明在集总参数电路中, 任一时刻沿任一回路的支路电压降之和等于电压升之和, 即

$$\sum u_{\text{升}} = \sum u_{\text{降}}$$

这是 KVL 的另一种表现形式。

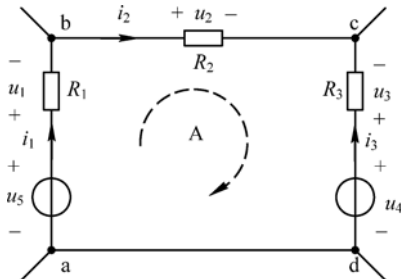


图 1.30 KVL 用图

对图 1.30, 节点 a、c 之间并无支路, 但是仍可以把 abca 看做一个回路, 可列如下方程:

$$u_{ac} - u_1 - u_2 + u_5 = 0$$

可见, KVL 不仅适用于电路中的具体回路, 对于电路中任一假想的回路, 它也是成立的。这种假想的回路称为广义回路。

单位正电荷沿着构成回路的各支路绕行一周所获得的能量必须等于所失去的能量。电位降低, 表示支路吸收电能; 电位升高, 支路提供电能。所以, 基尔霍夫电压定律是能量守恒定律在集总参数电路中的具体体现, 或者说, 它反映了保守场中做功与路径无关的物理本质。

关于 KVL 的应用, 也应明确以下几点:

(1) KVL 适用于任意时刻、任意激励源、任何性质元件构成的一切集总参数电路, 也是电路的一个普遍适用的定律。

(2) 应用 KVL 列回路电压方程时, 首先假设回路中各元件(或各段电路)上电压参考方向, 然后选定一个回路的绕行方向(顺时针或逆时针均可), 自回路中某一点开始, 按所选方向沿着回路绕行一圈列写各电压代数之和。若电压参考方向与回路的绕行方向一致, 该电压前取“+”号, 反之取“-”号。

例 1.8 如图 1.31 所示电路, 已知 $I_1 = 4\text{ A}$, $U_2 = 10\text{ V}$, $U_3 = 6\text{ V}$, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$ 。试求 U_4 、 I_2 、 I_3 、 R_2 及 U_S 的值。

解: 根据欧姆定律可得:

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{6}{3} = 2\text{ A}$$

由 KVL 可得

$$-U_S + I_1 R_1 + U_2 = 0$$

则

$$U_S = I_1 R_1 + U_2 = 2 \times 4 + 10 = 18\text{ V}$$

对于节点 a, 依 KCL 有

$$I_2 = I_1 - I_3 = 4 - 2 = 2\text{ A}$$

则

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{10}{2} = 5\ \Omega$$

对右边网孔设定顺时针方向为绕行方向, 依 KVL 有

$$-U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

则

$$U_4 = U_2 - U_3 = 10 - 6 = 4\text{ V}$$

例 1.9 如图 1.32 所示电路, 试求 ab 端开路电压 U_{OC} 的值。

解: 设电流 I_1 的参考方向如图中所标, 由 KCL 可得:

$$I_1 = 8I + I = 9I$$

对回路 A 列写 KVL 方程可得:

$$2I + 2I_1 - 20 = 0$$

联立求解上面两式, 则

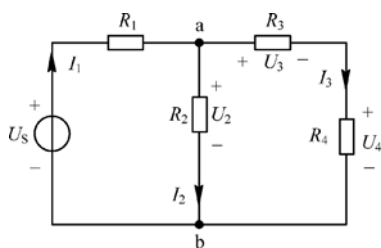


图 1.31 例 1.8 图

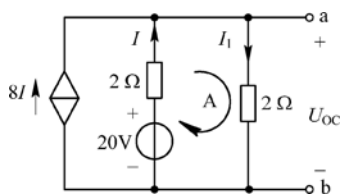


图 1.32 例 1.9 图

$$I_1 = 9 \text{ A}$$

由欧姆定律可得

$$U_{OC} = 2I_1 = 2 \times 9 = 18 \text{ V}$$

求解含有受控源的电路,列写 KCL、KVL 方程时,应该把受控源当做独立源一样看待,写出控制量与待求量之间的关系式,即辅助方程,联立求解基本方程和辅助方程即可得到所求量。

1.7 Multisim 仿真应用

在分析或设计较为复杂的电路时,由于步骤较多,计算量较大,所以可能出错。要验证电路的分析或设计的正确性,最直接和最有效的方法是构建实际电路,用测试和实验的结果来进行验证。但这样做往往要花费较多的时间和精力,有时还需要较大的经济投入。采用计算机仿真的方法,则可以在花费较少的情况下实现对电路设计和分析结果的验证,甚至可以在电路的分析难以进行时,直接采用电路仿真得到分析结果。

1.7.1 Multisim 2001 软件简介

Multisim 2001 是加拿大 Interactive Image Technology 公司(即 IIT 公司)研制的虚拟电子工作台电路仿真软件。它提供从电路仿真设计到版图生成全过程的电子设计,是一套 EDA (Electronic Design Automation, 电子设计自动化)工具。

该软件的特点是采用直观的图形界面,在计算机屏幕上模拟真实实验室的工作台,用屏幕抓取的方式选用元器件,创建电路,连接测量仪器。软件仪器的控制面板外形和操作方式都与实物相似,可以实时显示测量结果,并可以交互控制电路的运行与测量过程。由于软件操作都是在计算机环境下进行,不是真实实际的元器件和仪器设备的连接,故称为虚拟电子实验室。

1.7.2 Multisim 2001 实例

Multisim 2001 软件拥有丰富的元器件模型、测量仪器和仿真分析工具,为电路分析提供了强大的工具,利用 Multisim 2001 可以仿真电路的各种性能,并验证定律的正确性。

下面通过几个实例来说明 Multisim 2001 的应用。

例 1.10 电路如图 1.33(a)所示,已知 $U = 10 \text{ V}$, $R = 20 \Omega$ 。试求流过 R 的电流。

解: 根据欧姆定律可得: $I = \frac{U}{R} = \frac{10}{20} = 0.5 \text{ A}$

在 Multisim 2001 电路窗口中创建如图 1.33(b)所示的电路,启动仿真,图 1.33(b)中电流表、电压表的读数即为仿真分析的结果。可见,理论计算与电路仿真结果是相同的。

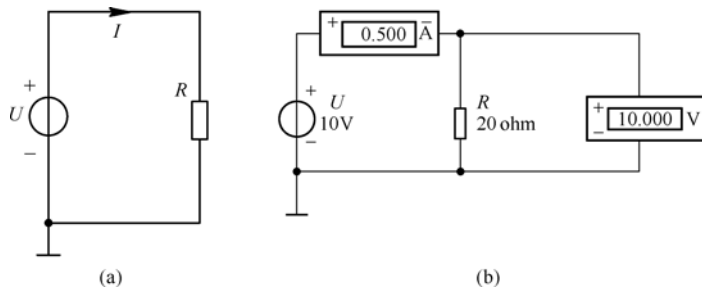


图 1.33 例 1.10 图

例 1.11 电路如图 1.34(a) 所示, 已知 $U = 12\text{ V}$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$ 。试求电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 上的电压 U_1 、 U_2 、 U_3 的值, 并验证基尔霍夫 KVL 电压定律。

解: 根据欧姆定律可得:

$$U_1 = IR_1 = \frac{12}{20 + 30 + 10} \times 20 = 4\text{ V}$$

$$U_2 = IR_2 = \frac{12}{20 + 30 + 10} \times 30 = 6\text{ V}$$

$$U_3 = IR_3 = \frac{12}{20 + 30 + 10} \times 10 = 2\text{ V}$$

在 Multisim 2001 电路窗口中创建如图 1.34(b) 所示的电路, 启动仿真, 图 1.34(b) 中电压表的读数为仿真分析的结果, 电压读数分别为 4 V、6 V 和 2 V, 其相加结果为 12 V, 等于电压源的电压, 即 $U_1 + U_2 + U_3 = U$ 。可见, 理论计算与电路仿真结果是相同的, 验证了 KVL 的正确性。

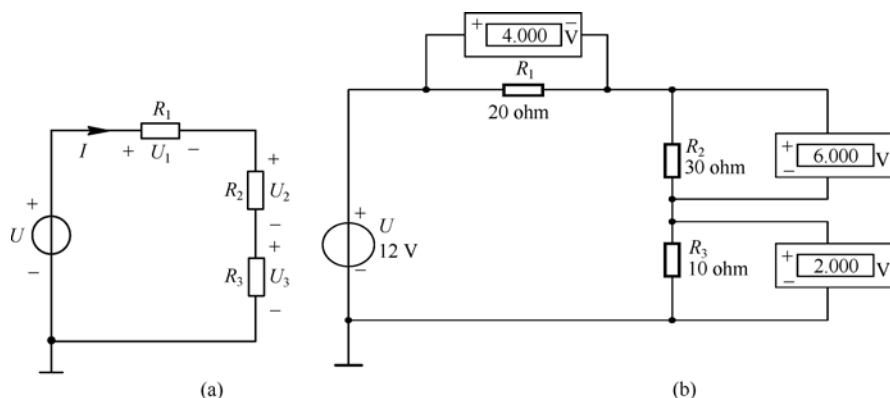


图 1.34 例 1.11 图

例 1.12 电路如图 1.35(a) 所示, 已知 $U = 12\text{ V}$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$ 。试求流过电压源的电流 I , 并验证基尔霍夫电流定律。

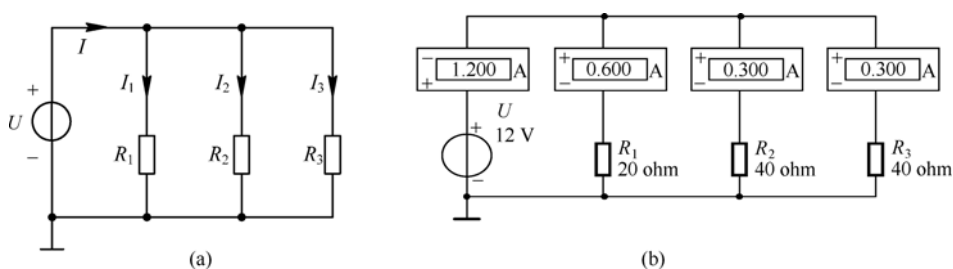


图 1.35 例 1.12 图

解: 根据欧姆定律可得:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{12}{20} = 0.6\text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{12}{40} = 0.3\text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{12}{40} = 0.3\text{ A}$$

在 Multisim 2001 电路窗口中创建如图 1.35 (b) 所示的电路, 启动仿真, 图 1.35 (b) 中电流表的读数为仿真分析的结果, 电流读数分别为 0.6 A、0.3 A 和 0.3 A, 其相加结果为 1.2 A, 等于流过电压源的电流, 即 $I_1 + I_2 + I_3 = I$ 。可见, 理论计算与电路仿真结果是相同的, 验证了 KCL 的正确性。

小结

1. 电压和电流

电压和电流是电路的基本变量, 不仅有大小, 而且还要关心方向。参考方向是为了便于分析电路问题, 对未知的电量(如电压、电流等)假设的方向。通常将电压的参考方向与电流的参考方向取为一致, 即采用关联参考方向。

2. 功率

电压、电流采用关联参考方向时, $P = UI$, 否则, 乘积前冠以“-”号。功率不仅有大小, 而且有正、负之分。若功率为“+”, 表示该元件消耗(或吸收)功率; 若功率为“-”, 表示该元件供出或释放功率。

3. 电位

电路中任意一点的电位是这一点到电位参考点的电压值。电位与参考点的选取有关, 但任意两点间的电压(电位差)与电位参考点的选取无关。

4. 电阻、电感和电容

无源电路元件电阻、电感和电容在关联参考方向下的伏安特性为

线性电阻: $U = IR$

电感: $u = L \frac{di}{dt}$

电容: $i = C \frac{du}{dt}$

电阻称为耗能元件, 电感和电容称为储能元件。

5. 电源

电源分为独立源和受控源。独立源又可分为独立电压源和独立电流源。

独立电源有自己独特的性质: 独立电压源能向外电路提供一个恒定的或按一定时间函数变化的电压, 而其电流则受外电路的影响由外电路确定; 独立电流源能向外电路提供一个恒定的或按一定时间函数变化的电流, 而其端电压则受外电路的影响由外电路确定。

6. 电路的基本定律

① 欧姆定律反映了流过电阻元件的电流与端电压间的关系, 表明了电阻元件的伏安特性。在电流、电压为关联参考方向时: $u = Ri$ (直流电路为 $U = RI$); 非关联时: $u = -Ri$ 。

② 基尔霍夫定律反映了电路结构间的约束关系, 称为拓扑约束。基尔霍夫定律包括基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)。基尔霍夫电流定律指出: 流入某一节点的电流一定等于流出该节点的电流, 即

$$\sum i_{\text{入}} = \sum i_{\text{出}}$$

或者, 流进某一节点电流的代数和为零。即

$$\sum i = 0$$

基尔霍夫电压定律指出：对于电路中的任一回路，它的各段电压的代数和为零，即

$$\sum u = 0$$

KCL 和 KVL 均与元件的性质无关。

习题 1

1.1 若沿电流参考方向通过导体横截面的正电荷变化规律为 $q(t) = 8t^2 + 2t$ (C)，试求 $t = 0$ 和 $t = 1$ s 时刻的电流。

1.2 电流参考方向如图 1.36(a) 所示，试求电流的大小，并说明其真实方向。已知正电荷 $q(t)$ 由 a 移向 b，电荷量 $q(t)$ 随时间变化的波形如图 1.36(b) 所示。

1.3 1 C 电荷由 a 移向 b，电场力做功 10J。

(1) 当电荷为正时，电压 u_{ab} 为多少？

(2) 当电荷为负时，电压 u_{ab} 为多少？

1.4 在图 1.37 所示的电路中，已知 $U = 36$ V, $R_1 = 2$ k Ω , $R_2 = 8$ k Ω ，试在下列三种情况下，分别求出电压 U_2 和电流 I_1 、 I_2 、 I_3 。

(1) $R_3 = 8$ k Ω ；

(2) $R_3 = \infty$ (即 R_3 处断开)；

(3) $R_3 = 0$ (即 R_3 处短接)。

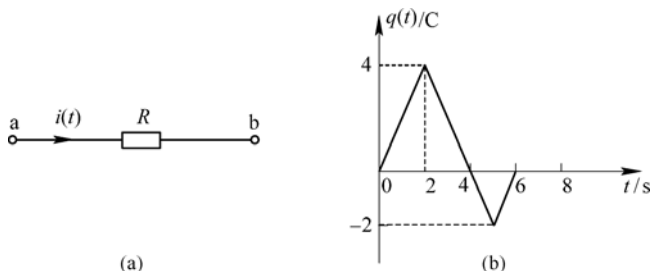


图 1.36

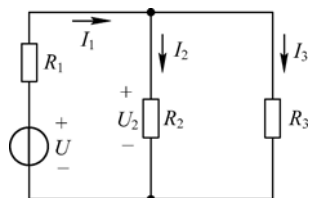


图 1.37

1.5 求图 1.38 所示电路中 a 点的电位 V_a 。

1.6 对图 1.39 所示电路，试计算开关 S 断开和闭合时 a 点的电位 V_a 。

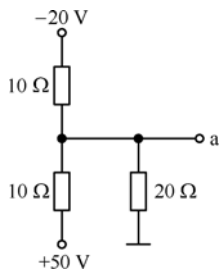


图 1.38

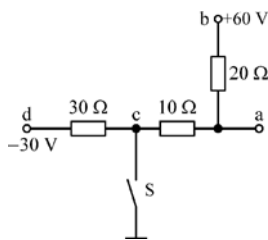


图 1.39

1.7 有一个 10 k Ω 、9 W 的电阻器，使用时它能承受的最大电压和允许通过的最大电流各是多少？若把这个电阻器接在 380 V 直流电源上能否正常工作？

1.8 如图 1.40 所示电路, 方框分别代表一个元件, 各电压、电流的参考方向均已设定。已知 $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = -1 \text{ A}$, $I_3 = 3 \text{ A}$, $I_4 = 1 \text{ A}$, $I_5 = -4 \text{ A}$, $I_6 = -5 \text{ A}$, $U_1 = 4 \text{ V}$, $U_2 = -2 \text{ V}$, $U_3 = 3 \text{ V}$, $U_4 = -1 \text{ V}$, $U_5 = -1 \text{ V}$, $U_6 = 2 \text{ V}$ 。求各元件的功率, 并说明它们是吸收功率还是向外提供功率。

1.9 如图 1.41 (a) 所示电路中, $i_s(t)$ 的波形如图 1.41 (b) 所示, 已知电容 $C = 2 \text{ F}$, 初始电压 $u_C(0) = 0.5 \text{ V}$ 。试求 $t \geq 0$ 时的电容电压, 并画出波形。

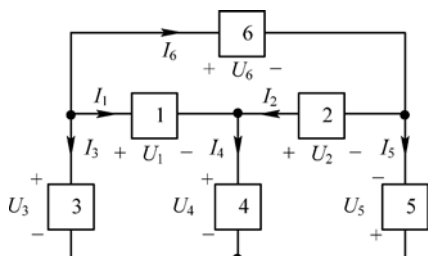


图 1.40

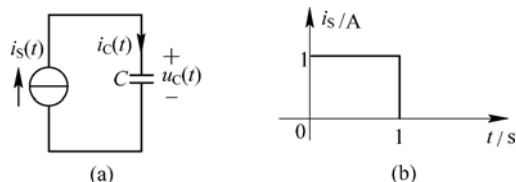


图 1.41

1.10 如图 1.42 (a) 所示电路中, $u_s(t)$ 的波形如图 1.42 (b) 所示, 已知电感 $L = 1 \text{ H}$, $i_L(0) = 0 \text{ A}$ 。试求 $t \geq 0$ 时的电感电流 $i_L(t)$, 并画出波形; 并求 $t = 2.5 \text{ s}$ 时, 电感储存的能量。

1.11 求图 1.43 所示各电路中独立源的功率, 并指明是吸收功率还是提供功率。

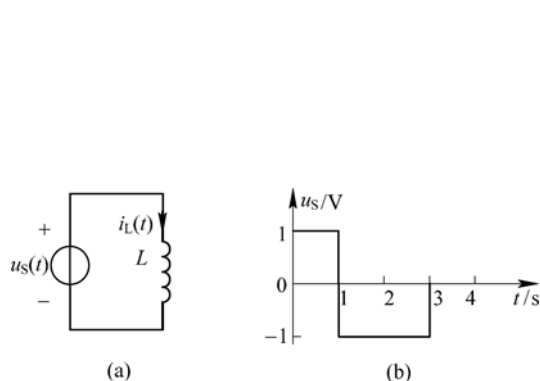


图 1.42

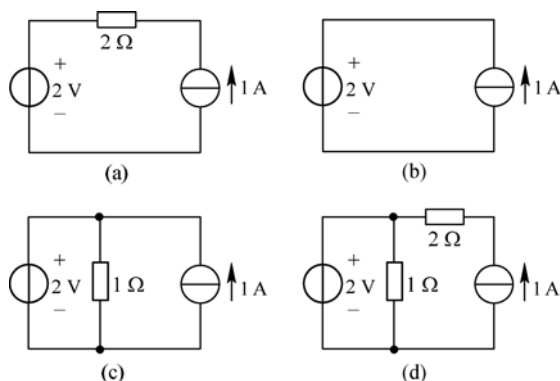


图 1.43

1.12 已知 $U_S = 10 \text{ V}$, $I_S = 5 \text{ A}$, $R_0 = 2 \Omega$, $R = 2 \Omega$, 求图 1.44 所示电路中的电流 I 和电压 U 。

1.13 求图 1.45 所示电路中 a、b 端的开路电压 U_{ab} 。

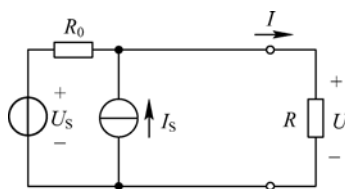


图 1.44

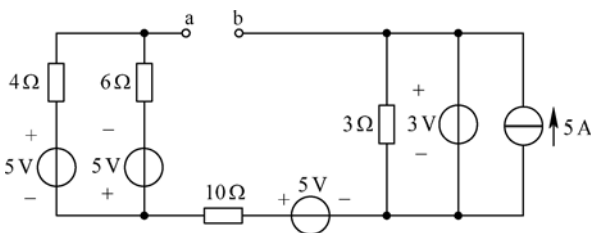


图 1.45

1.14 求图 1.46 所示各电路中的未知电流。

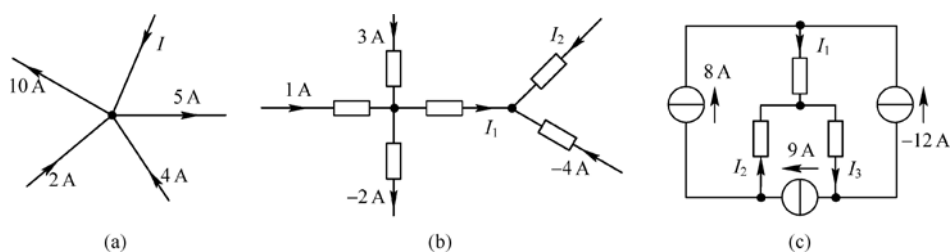


图 1.46

1.15 求图1.47所示各电路中的未知电压 U 。

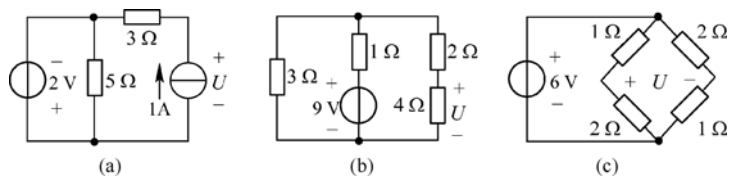


图 1.47

1.16 求图1.48所示电路中未知电阻 R 。

1.17 求图1.49所示电路中各元件的功率。

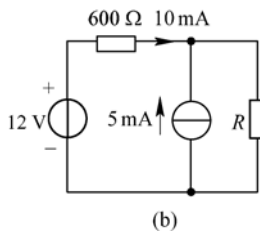
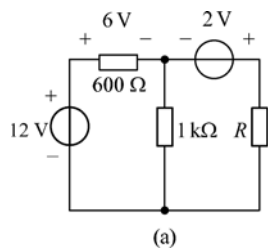


图 1.48

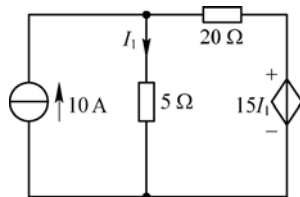


图 1.49

1.18 在图 1.50 所示电路中, 已知 $U_{ab} = 50\text{ V}$, 求 I_1 、 I_2 和 R 的值。

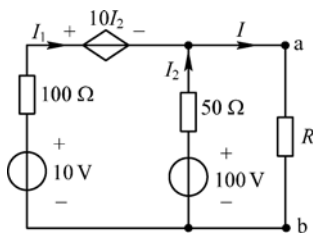


图 1.50

第2章 直流电路及基本分析法

由独立源、受控源和电阻构成的电路称为电阻电路，电路中的电源可以是直流的也可以是交流的，若所有的独立电源都是直流电源时，则这类电路称为直流电路。本章主要介绍等效的概念以及等效变换在电阻电路中的应用，复杂电路的一般分析方法以及线性网络的基本定理。

需要说明的是，本章介绍的等效的概念、基本公式、基本分析方法和基本定理，虽然是在直流电路中引入、论证的，但是同样适用于后面各章。因此，本章的内容是这门课的理论基础，应该牢固掌握并熟练应用。

2.1 电阻电路的等效变换分析法

等效变换的分析方法是电路分析中常用且简便的一种分析方法，通过一次或多次使用等效的概念，将结构比较复杂的电路转换为结构简单的电路，用来分析电路，可以方便地求出电流、电压或功率等需要的结果。

电路的等效变换就是把电路的一部分用结构不同但端子数和端子上电压、电流关系完全相同的另一部分电路代替。因为代替部分电路与被代替部分电路的电压、电流关系相同，对电路没有变换的部分(外接电路，简称外电路)来说，它们具有完全相同的影响，没有丝毫区别。

像这样的两部分电路互相称为等效电路。当电路的一部分用它的等效电路代换后，往往可以简化电路，有利于未变换部分(外电路)的分析计算。需要强调的是，互为等效的两个电路其“等效”只意味着对外电路等效，也就是对端口等效，但已被等效代换后的那部分和原电路的工作状况一般是不相同的，即对内部并不等效。下面讨论二端网络的等效变换。

如图2.1所示的等效电路，如果两个二端网络(也称单端口网络、单口网络) N_1 和 N_2 的端口伏安关系完全相同，那么这两个二端网络 N_1 和 N_2 等效。尽管这两个网络具有不同的内部结构，但对任一外电路来说它们具有完全相同的作用。

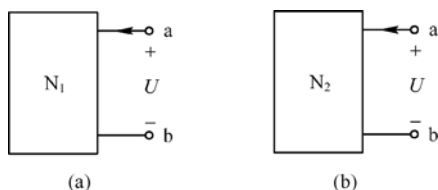


图 2.1 等效电路

2.1.1 电阻串联、并联及混联的等效变换

1. 电阻的串联

n 个电阻依次首尾相接，中间没有分支，当接通电源后，每个电阻上通过的是同一个电流，这种连接方式称为电阻的串联。如图2.2(a)所示为两个电阻串联电路。设电流、电压的参考方向如图所示，则由欧姆定律及KVL，得

$$U = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2)I \quad (2.1)$$

对图2.2(b)根据欧姆定律可得其VAR

$$U = R_{eq}I \quad (2.2)$$

若图2.2(b)是图2.2(a)的等效电路，则有

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (2.3)$$

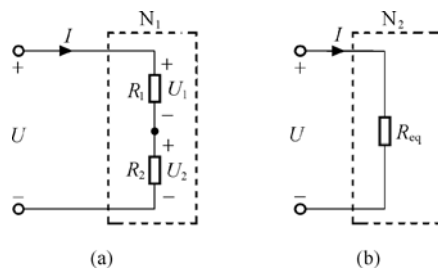


图 2.2 电阻的串联和等效电路

这样,如图2.2(b)所示用 R_{eq} 来代替 R_1 、 R_2 的串联,其两端的电压和电流关系不会改变。图 2.2(a)、(b)具有相同的伏安特性, R_{eq} 为 R_1 、 R_2 串联后的等效电阻。

n 个电阻串联时,计算等效电阻的一般公式为 $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i$, 即 n 个电阻串联时的电阻等于这 n 个串联电阻之和。

电阻串联时具有分压关系,任一电阻的电压 $U_k = R_k I = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} U$, $k=1, 2, \dots, n$

R_1 与 R_2 上的电压 U_1 与 U_2 分别为

$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_{\text{eq}}} U = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad (2.4)$$

$$U_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_{\text{eq}}} U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (2.5)$$

式(2.4)为两个电阻相串联时的分压公式,串联电阻上的电压与各电阻的阻值成正比,电阻越大,其分配的电压越大。

将式(2.3)两边同乘以 I^2 得 $R_{\text{eq}} I^2 = R_1 I^2 + R_2 I^2$

即

$$P = P_1 + P_2 \text{ 且 } \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (2.6)$$

电阻串联电路消耗的总功率等于相串联各电阻消耗功率之和,电阻越大,其消耗的功率越大。利用串联电阻的分压特性可以设计制作直流电压表和分压器。

例 2.1 图2.3为一个分压器,已知 R_W 是 $1 \text{ k}\Omega$ 的电位器,且 $R_1 = R_2 = 500 \Omega$, $U_1 = 20 \text{ V}$ 。试求电压 U_2 的输出范围。

解: 由题意, R_W 滑动触头移至 b 端时,输出电压 U_2

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_W} U_1 = \frac{500}{500 + 500 + 1000} \times 20 = 5 \text{ V}$$

R_W 滑动触头移至 a 端时,输出电压 U_2

$$U_2 = \frac{R_2 + R_W}{R_1 + R_2 + R_W} U_1 = \frac{500 + 1000}{500 + 500 + 1000} \times 20 = 15 \text{ V}$$

所以,调节电位器可以使电压 U_2 的输出在 $5 \sim 15 \text{ V}$ 之间连续变化。

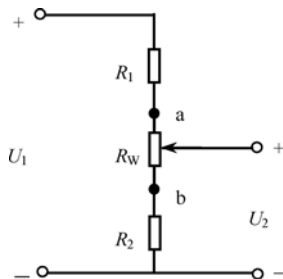


图 2.3 例 2.1 图

2. 电阻的并联

将 n 个电阻的首端、尾端分别连在一起,当接通电源后,每个电阻的端电压均相同,这种连接方式称为电阻的并联。如图 2.4(a)所示为两个电阻并联电路。设电流、电压的参考方向关联如图所示,则由欧姆定律及 KCL 得

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U \quad (2.7)$$

对图2.4(b)根据欧姆定律可得其 VAR

$$I = \frac{1}{R_{\text{eq}}} U \quad (2.8)$$

若图2.4(b)是图2.4(a)的等效电路, 则有

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.9)$$

电阻并联, 其等效电阻之倒数等于相并联各电阻倒数之和。这一结论也适用于两个以上电阻并联的情况。将式(2.9)右端通分并两端取倒数, 得最常用的两个电阻并联后求等效电阻的公式

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.10)$$

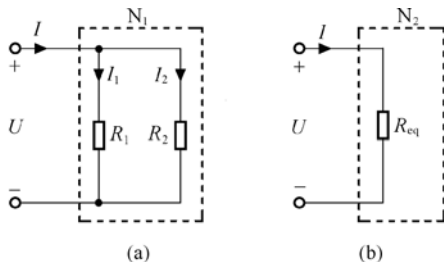


图 2.4 电阻的并联和等效电路

当 n 个电阻并联时, 计算等效电阻的一般公式为

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

电阻并联有分流关系。因为 $U = R_{\text{eq}} I$, 流过任一电阻的电流 $I_k = \frac{U}{R_k} = \frac{R_{\text{eq}}}{R_k} I$, $k=1, 2, \dots, n$

应用欧姆定律, R_1 与 R_2 上的电流 I_1 与 I_2 分别为

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{R_1} = \frac{R_{\text{eq}}}{R_1} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \\ I_2 &= \frac{U}{R_2} = \frac{R_{\text{eq}}}{R_2} I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \end{aligned} \quad (2.11)$$

且有

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (2.12)$$

式(2.11)为两个电阻相并联时的分流公式, 流过并联电阻的电流与各电阻的阻值成反比, 电阻越大, 其流过的电流越小。如果已知电阻并联电路中某一电阻上的分电流, 可应用欧姆定律及 KCL 方便地求出总电流。

将式(2.9)两边同乘以 U^2 得

$$\frac{U^2}{R_{\text{eq}}} = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2}$$

可知

$$P = P_1 + P_2 \text{ 且 } \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (2.13)$$

电阻并联电路消耗的总功率等于相并联各电阻消耗功率之和, 电阻越大, 其消耗的功率越小。利用并联电阻的分流特性可以设计制作直流电流表和分流器。

例 2.2 试分别计算下面并联电阻的等效电阻。

(1) $R_1 = 200 \, \Omega$, $R_2 = 300 \, \Omega$

(2) $R_1 = R_2 = R = 500 \, \Omega$

(3) $R_1 = 10 \, \Omega$, $R_2 = 10 \, \text{k}\Omega$

解: 由式(2.10)可得

$$(1) R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200 \times 300}{200 + 300} = 120 \, \Omega$$

$$(2) R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R}{2} = 250 \, \Omega$$

$$(3) R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \times 10000}{10 + 10000} \approx 10 \, \Omega$$

从以上结果可以看出, 并联电阻的电阻值小于最小的电阻值。当 $R_1 = R_2 = R$ 时, 等效电阻 $R_{eq} = R/2$, n 个阻值均为 R 的电阻并联, 则并联等效电阻 $R_{eq} = R/n$ 。若 $R_1 = R_2$, 则等效电阻 $R_{eq} \approx R_1$ 。

3. 电阻的混联

多个电阻元件相连接, 其中既有电阻串联又有电阻并联的连接形式称为电阻的混联。

能直接利用电阻串、并联的方法化简的电路称为简单电路; 否则称为复杂电路。对于某些复杂电路, 在一定条件下(例如电路具有一定的对称性或等电位点)可以将复杂电路等效变换成为简单电路, 从而简化电路的计算。

一般混联电路不易一眼分辨出各元件的串、并联关系, 需要仔细辨别电阻间的连接方式。判别混联电路的串、并联关系应注意下述 3 点:

(1) 观察电路的结构特点。若两电阻首尾相连就是串联, 如果首首相连就是并联。

(2) 根据电压电流关系。若通过各电阻的电流为同一电流, 可视为串联; 若各电阻两端承受的电压是同一电压, 可视为并联。

根据上述两点, 可逐步利用电阻的串联、并联等效以及分压、分流公式来实现对混联电路的变换。但是, 如果遇到的电路连接方式错综复杂时, 还需要用到下面的第三点。

(3) 对电路做变形等效。就是对电路做扭动变形, 对原电路进行改画, 上面的支路可以放到下面, 左边的支路可以变到右边, 弯曲的支路可以拉直, 对电路中的短路线可以任意伸缩, 对多点接地点可以用短路线相连。采用上述方法对一般的电阻串、并联问题是相当有效的。下面通过具体的实例来说明混联电路的等效变换。

例 2.3 求图 2.5(a) 所示电路 ab 端的等效电阻。

解: 短路线压缩, 则 c、d、e 点合并为一点, 如图 2.5(b) 所示, 根据电阻的串、并联关系, 再由图 2.5(b) 逐步等效简化为如图 2.5(c) 所示, 可知

$$R_{ab} = [(2 + 2) // 4 + 3] // 5 = 2.5 \, \Omega$$

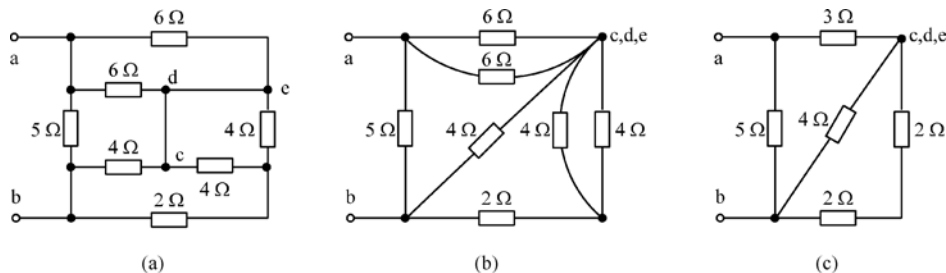


图 2.5 例 2.3 图

2.1.2 电阻星形连接与三角形连接及其等效变换

利用电阻的串、并联等效变换可以化简很多电阻网络, 进而对电路进行分析和求解。但也有一些电阻网络无法用电阻的串、并联等效变换进行化简。如图 2.6 所示的桥式电路, 其电阻网络既不是串联

也不是并联,无法用电阻的串、并联等效变换来化简。但是如果把图 2.6(a) 所示电路中电阻 R_1 、 R_3 、 R_5 的连接方式等效变换成图 2.6(b) 所示电路中的电阻 R_6 、 R_7 、 R_8 的连接方式,这样就可以用串、并联等效变换的方法进行化简。

在电路中,如图 2.7(a) 中 3 个电阻都有一个端子连接在一起构成一个节点,另一个端子则分别与外电路连接,这种连接方式称为星形连接(Y 形连接或 T 形连接);如图 2.7(b) 中 3 个电阻的端子分别首尾相连形成 3 个节点,并通过这 3 个节点与外电路相连,这种连接方式称为三角形连接(Δ 形连接或 π 形连接)。星形电路和三角形电路都是通过三个端子与外电路相连,是两个典型的三端电阻电路。

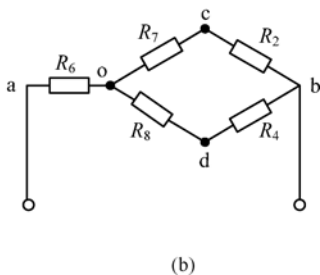
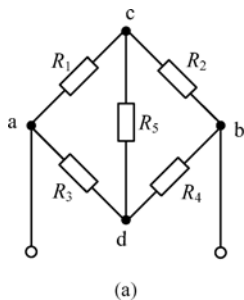


图 2.6 桥式电路

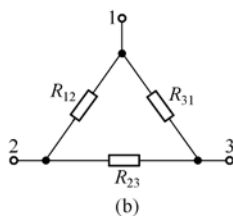
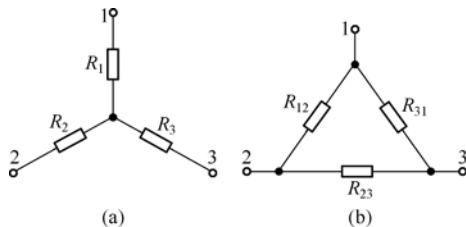


图 2.7 电阻的星形连接和三角形连接

在一定条件下,这两种接法的电阻网络可以等效互换,而电路中其余部分的电压和电流不受影响。

假设图 2.7 中电阻的星形连接和三角形连接是等效的,那么两个电阻网络在 3 端开路时,1 端和 2 端之间的等效电阻应该相等。在图 2.7(a) 中,当 3 端开路时,1、2 两端的等效电阻为: $R_{Y12} = R_1 + R_2$ 。

在图 2.7(b) 中,当 3 端开路时,1、2 两端的等效电阻为: $R_{\Delta 12} = R_{12} // (R_{23} + R_{31}) = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$

由于两网络等效,应有 $R_{Y12} = R_{\Delta 12}$, 即

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

同理,在 2 端开路时,3 端和 1 端之间的等效电阻相等;在 1 端开路时,2 端和 3 端之间的等效电阻相等。即

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

上面的三个式子联立求解,得

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases} \quad (2.14)$$

根据式 (2.14), 即可由已知的三角形网络求出等效的星形网络。为了方便记忆, 该公式可以概括为:

$$R_i = \frac{\text{三角形网络中与端子 } i \text{ 相连的两电阻的乘积}}{\text{三角形网络中三个电阻之和}}$$

三角形网络电阻之和

反之也可以求得

$$\begin{cases} R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \\ R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \\ R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \end{cases} \quad (2.15)$$

根据式(2.15)可由已知的星形网络求出等效的三角形网络。该公式可以概括为:

$$R_{ij} = \frac{\text{星形网络电阻两两乘积之和}}{\text{星形网络中与电阻 } R_{ij} \text{ 相对端子连接的电阻}}$$

当星形网络电阻相等, 即 $R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$ 时, 等效三角形网络电阻也是相等的, 且有

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{\Delta} = 3R_Y$$

当三角形网络电阻相等, 即 $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{\Delta}$ 时, 等效星形网络电阻也是相等的, 且有

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3}$$

这些关系在三相交流电路的分析中非常有用。

例 2.4 图 2.8(a) 所示电路中, 已知 $R_1 = 40 \Omega$, $R_2 = 36 \Omega$, $R_3 = 50 \Omega$, $R_4 = 55 \Omega$, $R_5 = 10 \Omega$, 求所示电路的等效电阻 R_{ab} 。

解: 将三角形连接的 R_1 、 R_3 、 R_5 等效变换为星形连接的 R_a 、 R_c 、 R_d , 如图 2.8(b) 所示, 代入式(2.14)求得

$$R_a = \frac{R_3 R_1}{R_5 + R_3 + R_1} = \frac{50 \times 40}{10 + 50 + 40} = 20 \Omega$$

$$R_c = \frac{R_1 R_5}{R_5 + R_3 + R_1} = \frac{40 \times 10}{10 + 50 + 40} = 4 \Omega$$

$$R_d = \frac{R_5 R_3}{R_5 + R_3 + R_1} = \frac{10 \times 50}{10 + 50 + 40} = 5 \Omega$$

图 2.8(b) 是电阻混联网络, 串联的 R_c 、 R_2 的等效电阻 $R_{c2} = 40 \Omega$, 串联的 R_d 、 R_4 的等效电阻 $R_{d4} = 60 \Omega$, 二者并联的等效电阻 $R_{ob} = \frac{40 \times 60}{40 + 60} = 24 \Omega$, 电路的等效电阻 $R_{ab} = 20 + 24 = 44 \Omega$ 。

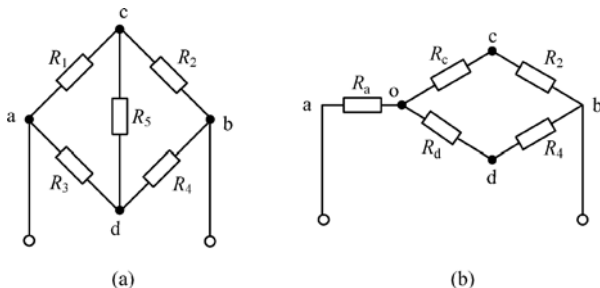


图 2.8 例 2.4 图

2.1.3 含独立电源网络的等效变换

独立电源(又称理想电源)实际上是不存在的。当实际电源接入电路时,实际电源内阻往往是不能忽略的,实际电源也分为电压源和电流源两种。

1. 实际电源的两种模型

(1) 实际电压源(简称为电压源)

实际电压源可以用理想电压源 U_S 与电阻 R_S 串联的模型来表征,当电压源外接无源负载后,有电流流过负载,电源的端电压 U 会比电压源的源电压小,且 U 不能保持恒定,而是电流 I 越大,端电压 U 越低。

如图2.9(a)中虚线框内所示为实际电压源模型。其中 U_S 称为电压源的源电压, R_S 称为电压源的内阻或输出电阻。在图2.9(a)所示的 U 、 I 参考方向下,电压源 a、b 端子上的伏安特性为

$$U = U_S - R_S I \quad (2.16)$$

上式的伏安关系也可以用 U - I 平面上的一条直线表示,如图2.9(b)所示。从式(2.16)或直线均可看出:

① 内阻 R_S 越小,伏安特性曲线越平坦,端电压 U 受电流 I 的影响越小,电压源的特性越接近理想电压源($U=U_S$)。实际上,理想电压源就是实际电压源的内阻 R_S 为零时的极限情况。

② 随着电流 I 增大,电源的端电压 U 逐渐减小。当 $U=0$ 时,即电源的输出端 a、b 短路,有 $I=I_{SC}=U_S/R_S$, I_{SC} 称为电源的短路电流;当 $I=0$ 时,即该电源 a、b 端开路,有 $U=U_{OC}=U_S$, U_{OC} 称为电源的开路电压。

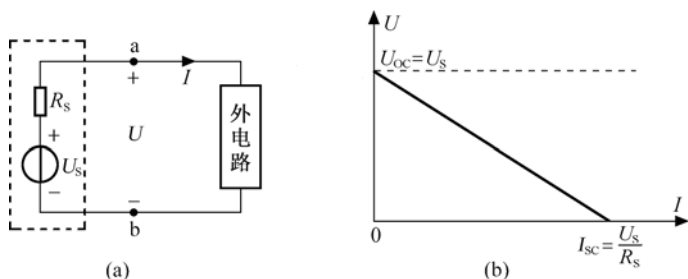


图 2.9 实际电压源模型及其伏安特性

比较 $U_{OC}=U_S$ 与 $I_{SC}=U_S/R_S$, 可知 $R_S=U_{OC}/I_{SC}$, 这说明,电压源模型的内阻等于开路电压与短路电流之比。因此,只要知道实际电源的开路电压和短路电流,就可以确定电压源模型中的源电压 U_S 和内阻 R_S 。

(2) 实际电流源(简称为电流源)

实际电流源可以用理想电流源 I_S 与电阻 R'_S 并联的模型来表征,当电流源与无源负载相接,向负载提供电流时,提供的电流 I 会比源电流小,且端电压 U 越大,电流 I 越小。

如图2.10(a)虚线框内所示为实际电流源模型。其中 I_S 称为电流源的源电流,电阻 R'_S 称为电流源的内阻或输出电阻,内阻 R'_S 也可用内电导 G'_S 表示。

在图2.10(a)所示 U 、 I 参考方向下,电流源 a、b 输出端子上的伏安特性为

$$I = I_S - U / R'_S = I_S - G'_S U \quad (2.17)$$

上式的伏安关系也可以用图2.10(b)所示的伏安特性曲线表示。从式(2.17)和特性曲线均可看出:

① 内阻 R'_S 越大,分流作用越小,伏安特性曲线越陡峭,电流源的特性越接近理想电流源($I=I_S$)。实际上,理想电流源是实际电流源的内阻 R'_S 为无穷大时的极限情况。

② 随着电源电压 U 的增大, 电源的输出电流 I 逐渐减小。当输出电压 $U=0$ 时, 即电流源输出端 a、b 短路, 输出电流即为短路电流 $I=I_{SC}=I_S$ 。当 $I=0$ 时, 即该电源 a、b 端开路, 输出电压即为开路电压 $U=U_{OC}=R'_S I_S$ 。

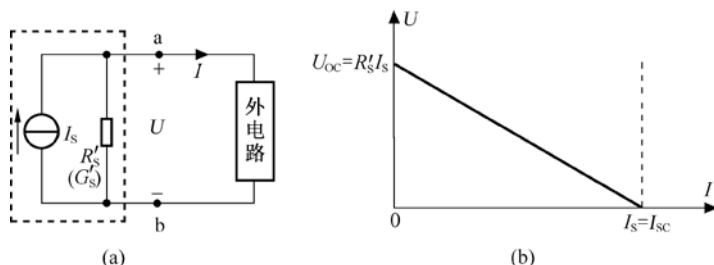


图 2.10 实际电流源模型及其伏安特性

比较 $U_{OC}=R'_S I_S$ 与 $I_{SC}=I_S$, 可知 $R'_S=U_{OC}/I_{SC}$ 或 $G'_S=I_{SC}/U_{OC}$ 。同样, 只要知道实际电源的开路电压 U_{OC} 和短路电流 I_{SC} , 就可以确定电流源模型中的源电流 I_S 和内阻 R'_S (或 G'_S)。

最后需要强调的是, 一个实际电源既可以看成是电压源, 又可以看成是电流源。当电源内阻 R_S 与负载 (或外电路的等效电阻) 相比较小时, 一般采用电压源模型; 反之, 当电源内阻 R_S 与负载相比较小时, 常采用电流源模型。

2. 两种实际电源模型的等效变换

在电路分析时, 我们关心的是电源的外部特性而不是内部情况, 对外电路而言只要实际电源的两种等效模型的外部特性相同, 即其端口的伏安特性相同, 那么无论用电压源还是用电流源, 对外电路的作用效果是一样的, 所以两者可以相互等效变换。

若同一实际电源的电压源模型和电流源模型是互为等效的, 则它们的伏安特性必须相同。所以式 (2.16) 和式 (2.17) 必须相同, 得

$$\begin{cases} I_S = U_S / R_S \\ R'_S = R_S \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} U_S = I_S R'_S \\ R_S = R'_S \end{cases} \quad (2.18)$$

根据式 (2.18) 就可以实现两种实际电源模型的等效变换。

在电压源与电流源做等效变换时还应注意:

(1) 有内阻 R_S 的实际电源, 它的电压源模型与电流源模型之间可以互换等效。理想电压源与理想电流源不能相互等效变换。原因是这两种理想电源定义本身是完全不同的, 二者不会具有相同的 VAR。理想电压源的 U_S 是恒定不变的, 而 I 决定于外电路负载, 随外电路变化而变化; 而理想电流源的 I_S 是恒定的, U 决定于外电路负载, 随外电路变化而变化, 故两者不能等效。

(2) 变换时要注意两种电路模型的极性必须一致, 即电流源流出电流的一端与电压源的正极性端相对应。

(3) 两电路中电源内阻 R_S 相等, 但连接方式不同。

(4) 所谓等效, 只是对电源的外电路而言的, 对电源内部则是不等效的。例如电流源, 当外电路开路时, $I=0$, $U=U_{OC}=R'_S I_S$, 内部仍有电流 I_S , 故内阻上有功率损耗; 但电压源开路时, 内阻上不损耗功率。

在一些电路中, 利用电流源和电压源的等效变换可使计算大为简化。

3. 含源网络的等效变换

前面我们讨论了电阻的等效变换, 同样含有多个电源元件的串、并、混联构成的二端网络, 也可以通过电源等效变换的方法用一个等效电源代换。

电源等效变换的规则如下:

(1) 当一个理想电压源与多个电阻或电流源相并联时, 对于外电路而言, 只等效于这个理想电压源; 当一个理想电流源与多个电阻或电压源相串联时, 对于外电路而言, 只等效于这个理想电流源。

(2) n 个电压源相串联, 等效于一个电压源。且该等效电压源的电压 $U_{\text{Seq}} = U_{\text{S1}} + U_{\text{S2}} + \cdots + U_{\text{Sn}} = \sum_{k=1}^n U_{\text{Sk}}$, 等于 n 个电压源的源电压的代数和, 源电压 U_{Sk} 与 U_{Seq} 的参考方向相同时, U_{Sk} 前面取 “+”, 否则取 “-”。等效电压源的内阻 $R_{\text{Seq}} = R_{\text{S1}} + R_{\text{S2}} + \cdots + R_{\text{Sn}} = \sum_{k=1}^n R_{\text{Sk}}$, 等于 n 个电压源的内阻的和。

(3) n 个电流源相并联, 等效于一个电流源。且该等效电流源的电流 $I_{\text{Seq}} = I_{\text{S1}} + I_{\text{S2}} + \cdots + I_{\text{Sn}} = \sum_{k=1}^n I_{\text{Sk}}$, 等于 n 个电流源的源电流的代数和, 源电流 I_{Sk} 与 I_{Seq} 的参考方向相同时, I_{Sk} 前面取 “+”, 否则取 “-”。等效电流源的内电导 $G_{\text{Seq}} = G_{\text{S1}} + G_{\text{S2}} + \cdots + G_{\text{Sn}} = \sum_{k=1}^n G_{\text{Sk}}$, 等于 n 个电流源的内电导的和。

(4) n 个电压源并联时, 可先将各电压源等效变换成电流源, 然后按照规则 (3) 进一步化简。理想电压源也可以并联, 但是只有方向一致且电压相等的电压源才允许并联, 否则将违背 KVL。 n 个方向一致且电压相等的电压源相并联时, 其等效电路为其中任一电压源。

(5) n 个电流源串联时, 可先将各电流源等效变换为电压源, 然后按照规则 (2) 进一步化简。理想电流源也可以串联, 但是只有方向一致且电流相等的电流源才允许串联, 否则将违背 KCL。 n 个方向一致且电流相等的电流源相串联时, 其等效电路为其中任一电流源。

利用电压源和电流源的等效变换可以简化电路, 从而解决一些电路分析问题。

例 2.5 利用电源等效变换的方法求图 2.11 (a) 所示电路的电流 I 。

解: 图 2.11 (a) 所示电路是一个比较复杂的电路, 利用电压源与电流源的等效变换, 可以逐步化简电路, 最终求得电流 I 。首先把电路最左边理想电压源与电阻的串联支路当做电压源, 把它等效变换为电流源, 如图 2.11 (b) 所示。

把图 2.11 (b) 中左边的两个电流源合并, 如图 2.11 (c) 所示。

把 3 A 理想电流源与 2Ω 电阻并联电路作为电流源等效变换为电压源, 如图 2.11 (d) 所示。

把图 2.11 (d) 所示的两个串联理想电压源合并, 如图 2.11 (e) 所示。

把图 2.11 (e) 所示的两个电压源支路等效变换为电流源支路, 如图 2.11 (f) 所示。

合并两个电流源, 得到图 2.11 (g) 所示电路, 则

$$I = I_{\text{S}} \frac{R_0}{R_0 + R} = 3 \times \frac{1}{1+2} = 1 \text{ A}$$

例 2.6 求图 2.12 (a) 所示电路中的电流 I 。

解: 求解这个电路的关键是如何处理图 2.12 (a) 中理想电压源、理想电流源和电阻的串联支路。根据理想电流源的定义, 这条支路的电流是确定的 3 A。这条支路的总电压为电阻的电压、理想电压源的电压和理想电流源电压的代数和。理想电压源的电压是确定的 9 V, 电阻的电压为

$$3 \text{ A} \times 24 \Omega = 72 \text{ V}$$

但理想电流源的电压是任意的 (由外电路确定), 所以支路的总电压仍为任意值 (由外电路确定)。

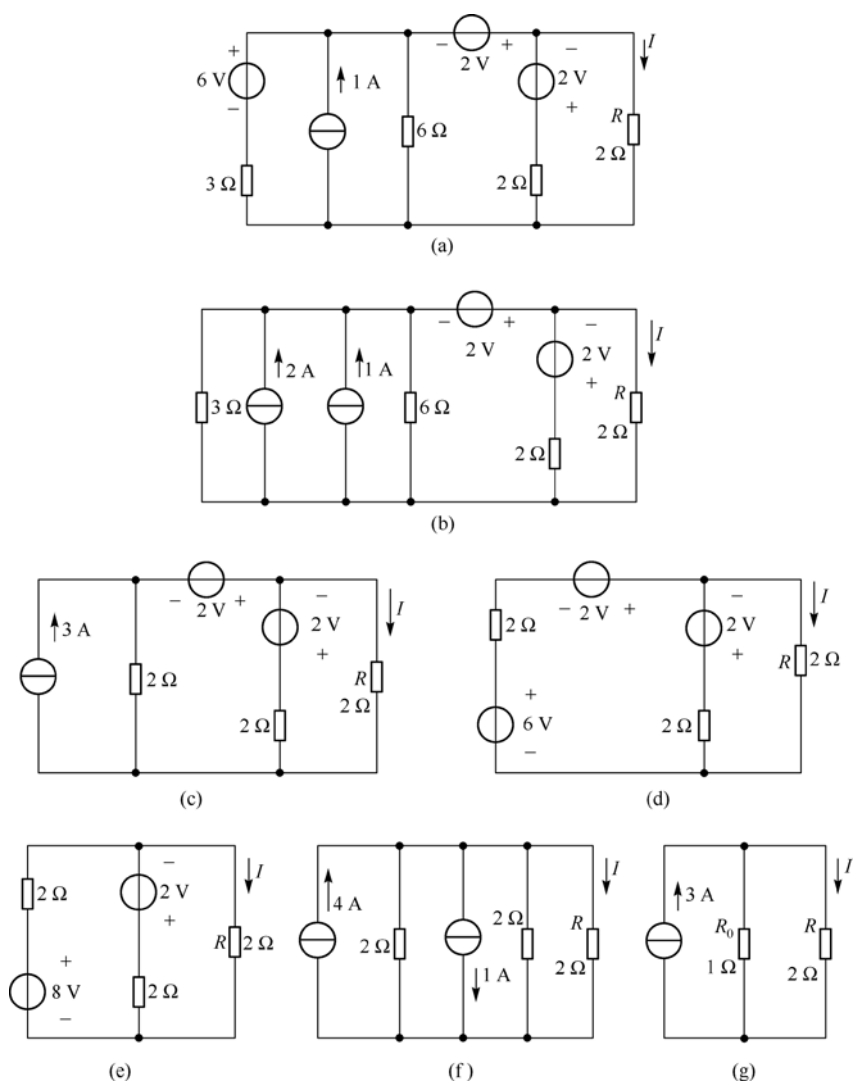


图 2.11 例 2.5 图

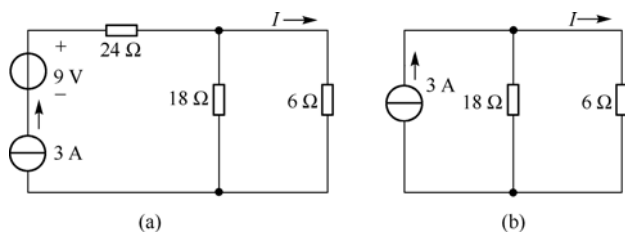


图 2.12 例 2.6 图

总之, 理想电压源、理想电流源和电阻的串联支路的电流是确定的 3 A, 电压是任意的, 所以是 3 A 的理想电流源, 如图 2.12(b) 所示。这样

$$I = \frac{18}{18+6} \times 3 = 2.25 \text{ A}$$

2.2 复杂电路的一般分析法

2.1 节讨论了等效变换的分析方法,这种方法要改变电路的结构,适用于求某一支路的响应问题,对于一些复杂电路的各个支路的求解,等效分析法就没有那么方便了。所以本节讨论更为一般的方法,以便直接求解复杂电路,而不需要多次等效变换。

复杂电路的一般分析方法包括支路电流法、网孔电流法和节点电位法。这些方法是全面分析电路的方法,主要是依据基尔霍夫定律和元件的伏安特性列出电路方程,然后联立求解。其特点是不改变电路的结构,分析过程有规律。

2.2.1 支路电流法

支路电流法是直接以支路电流为未知量,根据元件的 VAR 及 KCL、KVL 约束关系,建立数目足够且相互独立的方程组,解出各支路电流,进而求得人们期望得到的电路中任一支路的电压、功率等。

如图2.13所示,它有3条支路,设各支路电流分别为 I_1 、 I_2 和 I_3 ,其参考方向标示在图上。就本例而言,问题是如何找到包含未知量 I_1 、 I_2 和 I_3 的3个相互独立的方程组。

根据 KCL,对节点 a 和 b 分别建立电流方程。设流入节点的电流取正号,则有

$$\text{节点 a: } I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$\text{节点 b: } -I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

以上两个方程是不独立的。对于一个具有两个节点的电路,利用基尔霍夫电流定律只能得到一个独立的方程,或者说,这个电路只有一个独立的节点。一般情况下,对于一个具有 n 个节点的电路,利用基尔霍夫电流定律可以列出 $(n-1)$ 个独立的方程。

根据 KVL,按图中所标绕行方向对回路 I、II、III 分别列写 KVL 方程,得

$$\text{回路 I: } R_1 I_1 - R_2 I_2 + U_{S2} - U_{S1} = 0$$

$$\text{回路 II: } R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_{S2} = 0$$

$$\text{回路 III: } R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_{S1} = 0$$

上述三个方程也是不独立的,只有两个方程独立。一般情况下,对于有 b 条支路 n 个节点的电路,利用基尔霍夫电压定律可列出 $b-(n-1)$ 个独立的方程,即具有 $b-(n-1)$ 个独立回路。

当未知变量数目与独立方程数目相等时,未知变量才可能有唯一解。从上述 5 个方程中选取出 3 个相互独立的方程如下:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_{S2} = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_{S1} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

式(2.19)是图2.13所示电路以支路电流为未知量的足够的相互独立的方程组之一,联立求解该三元一次方程组便可得到各未知的支路电流 I_1 、 I_2 和 I_3 ,当知道了各支路电流后,就可以进一步求解出各支路电压及各元件的功率。

由以上分析,对于有 b 条支路 n 个节点的电路,可以归纳支路电流法分析电路的步骤。

(1) 设出各支路电流,标明参考方向。任取 $n-1$ 个节点,依 KCL 列独立节点电流方程。

(2) 选取 $b-(n-1)$ 独立回路,并选定绕行方向,依 KVL 列出所选独立回路电压方程。对平面

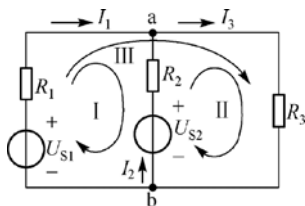


图 2.13 支路电流法

电路而言,网孔数恰好等于独立回路数,网孔就是独立回路,所以平面电路一般选网孔列写独立电压方程。

(3) 如若电路中含有受控源,还应将控制量用未知电流表示,多加一个辅助方程。

(4) 联立求解(1)、(2)、(3)三步列写的方程组,就得到各支路电流。如果需要,再根据元件约束关系等计算电路中任一支路的电压、功率。

例 2.7 在图 2.14 所示电路中,已知 $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, $R_4 = 1.5 \Omega$, $U_{S1} = 15 \text{ V}$, $U_{S2} = 9 \text{ V}$, $U_{S3} = 4.5 \text{ V}$, 求各支路电流和电压 U_{ab} 。

解: 图中共 2 个节点, 3 条支路, 2 个网孔, 根据 KCL 列出 b 节点电流方程:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

电路为平面电路, 选择网孔 I、II 作为独立回路, 根据 KVL 列出电压方程分别为

$$10I_1 + 5I_1 + I_2 + 15 - 9 = 0$$

$$-I_2 + 1.5I_3 + 9 - 4.5 = 0$$

联立 KCL、KVL 方程, 可解得:

$$I_1 = -0.5 \text{ A}, I_2 = 1.5 \text{ A}, I_3 = -2 \text{ A}$$

$$\text{电压 } U_{ab} = -I_2 \times R_3 + U_{S2} = -1.5 \times 1 + 9 = 7.5 \text{ V}$$

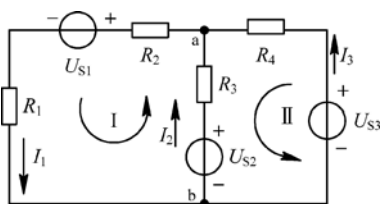


图 2.14 例 2.7 图

2.2.2 网孔电流法

支路电流法是求解复杂电路的基本方法, 优点是它能求解任何复杂电路, 对未知支路电流可以直接求解。但联立方程式过多, 计算较繁, 容易出现错误。

能否克服支路电流法的缺点, 减少联立方程的个数而简化计算呢? 网孔电流法就是这样的一种改进方法。

网孔电流法是以假想的网孔电流作为电路变量, 列写网孔 KVL 方程求解出网孔电流, 进而求得各支路电流、电压、功率等, 这种求解电路的方法称网孔电流法(简称网孔法)。

为了建立网孔电压方程, 首先假想有一个网孔电流沿网孔边界流动, 如图 2.15 所示的 I_{m1} 和 I_{m2} 。但网孔电流实际上是不存在的, 实际存在的是支路电流。人们为了减少待求量的数目, 而将支路电流用网孔电流的合成来表示, 其流动方向就是网孔电流的参考方向, 也就是列写 KVL 方程时的绕行方向, 然后列网孔的 KVL 方程。

如图 2.15 所示, 各网孔电流与各支路电流之间的关系为

$$I_1 = I_{m1}$$

$$I_2 = -I_{m1} + I_{m2}$$

$$I_3 = -I_{m2}$$

对于只属于一个网孔的支路, 其支路电流即是网孔电流, 或是只差一个负号(由参考方向决定); 对于两个网孔的公共支路, 支路电流是两个相关网孔电流的代数和, 即 $I_2 = -I_{m1} + I_{m2}$, 这样用 2 个网孔电流表示了电路中全部 3 条支路的电流。

根据 KVL, 列网孔的电压方程, 选取网孔的绕行方向与网孔电流的参考方向一致, 可得

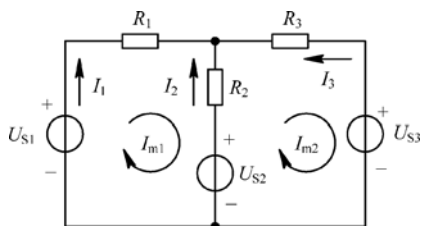


图 2.15 网孔电流法

- (1) 选定参考节点, 标注节点电压。
- (2) 对各独立节点按照节点方程的规则列写节点方程。
- (3) 求解方程, 即可得出各节点电压。
- (4) 根据所求出的节点电压求题目中需要求的各量。

例 2.9 如图2.18所示电路, 采用节点电压法求各支路的电流。

解: 取节点3为参考结点, 节点1的电压为 U_1 , 节点2的电压为 U_2 。由电路图可以直接写出电路的节点电压方程为

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{1}{2}\right)U_1 - \frac{1}{2}U_2 = 3 \\ -\frac{1}{2}U_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)U_2 = 7 \end{cases}$$

解得

$$U_1 = 6 \text{ V}, U_2 = 12 \text{ V}$$

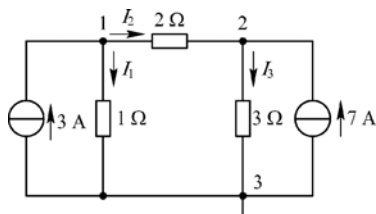


图 2.18 例 2.9 图

取各支路电流的参考方向, 如图 2.18 所示。根据支路电流与节点电压的关系, 有

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{1} = \frac{6}{1} = 6 \text{ A} \\ I_2 &= \frac{U_1 - U_2}{2} = \frac{6 - 12}{2} = -3 \text{ A} \\ I_3 &= \frac{U_2}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ A} \end{aligned}$$

例 2.10 如图2.19所示电路, 已知 $U_{S1} = 10 \text{ V}$, $U_{S3} = 4 \text{ V}$, $I_{S4} = 4 \text{ A}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_4 = 6 \Omega$ 。求节点电压 U_1 和 U_2 。

解: 由图可知节点3为参考点。电路节点1和节点2之间的理想电压源 U_{S3} 支路的电阻为零, 即电导为无穷大, 无法直接写出节点电压方程。假设流过理想电压源 U_{S3} 的电流为 I_3 , 则节点电压方程为

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)U_1 &= \frac{U_{S1}}{R_1} + I_3 \\ \frac{1}{R_4}U_2 &= -I_3 + I_{S4} \end{aligned}$$

这样方程中就有了 U_1 、 U_2 和 I_3 三个变量, 所以必须将理想电压源 U_{S3} 的特性作为补充方程

$$U_1 - U_2 = U_{S3}$$

代入数值有

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)U_1 &= \frac{10}{3} + I_3 \\ \frac{1}{6}U_2 &= -I_3 + 4 \\ U_1 - U_2 &= 4 \end{aligned}$$

解得

$$U_1 = 12 \text{ V}, U_2 = 8 \text{ V}$$

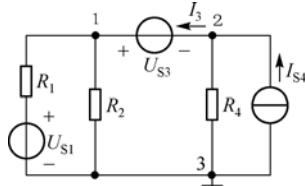


图 2.19 例 2.10 图

2.3 线性电路的几个基本定理

由独立源和线性元件组成的电路，称为线性电路。利用支路电流法、网孔电流法和节点电压法进行电路的分析，能够在电路结构和参数保持不变的情况下，直接确定各支路的电压或电流，因此称为直接分析法。用直接分析法能够求出全部的未知电流或电压，但有时并不要求出全部的未知量，而只要求某一支路的电流或电压。间接分析法为这类问题的解决提供了很好的途径。所谓间接分析法就是等效地改变原电路，使复杂电路变换成简单电路，从而对简单电路求解，简化了分析过程。间接分析法的理论依据就是线性电路的几个基本定理。

2.3.1 叠加定理

线性电路必须同时满足齐次性和叠加性。当激励 U_1 作用于线性电路产生的响应为 U_2 时，则 U_1 增大 K 倍为 KU_1 时，产生的响应也跟着增大 K 倍而成为 KU_2 ，响应与激励成正比的这种性质称为齐次性(又称比例性)；若激励 U_1 、 U_2 分别作用于线性电路产生的响应是 U_{11} 、 U_{22} ，则当激励 U_1 、 U_2 共同作用于线性电路时，产生的总响应为 U_{11} 、 U_{22} 之和，这种性质称为叠加性(又称可加性)。

符合叠加性的电路同时也具有齐次性。因此，叠加性质是线性电路的基本性质。叠加定理(又称叠加原理)的根据就是线性电路的叠加性。

叠加定理是线性电路的一个基本定理。叠加定理可表述如下：在线性电路中，当有两个或两个以上的独立电源同时作用时，则电路的任一支路响应(电流或电压)，都可以认为是电路中各个电源单独作用时，在该支路中产生的各分响应(电流分量或电压分量)的代数和。

如图2.20(a)所示电路含有两个独立电源，图2.20(b)、(c)分别给出了独立电压源和独立电流源单独作用时的电路。

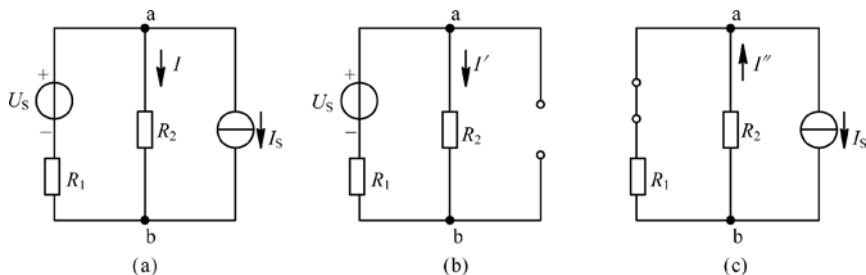


图 2.20 叠加定理示意图

对图2.20(a)，节点 a 与节点 b 间的电压为 U_1

$$U_1 = \frac{\frac{U_s}{R_1} - I_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 U_s - R_1 R_2 I_s}{R_1 + R_2}$$

流过 R_2 的支路的电流为 I

$$I = \frac{U_1}{R_2} = \frac{U_s - R_1 I_s}{R_1 + R_2} = \frac{U_s}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s$$

由图 2.20(b)所示电路，可得当电压源单独作用时流过 R_2 的支路电流 I'

$$I' = \frac{U_s}{R_1 + R_2}$$

由图2.20(c)所示电路, 可得当电流源单独作用时流过 R_2 的支路电流 I''

$$I'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_S$$

$$\text{很显然, } I' - I'' = \frac{U_S}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_S = I$$

可见, 由两个独立电源共同作用产生的支路电流等于每个电源单独作用时产生的电流的代数和。
应用叠加定理分析解决电路问题时要注意:

(1) 叠加定理只适用于线性电路, 不适用于非线性电路。这是因为线性电路中的电压和电流都与激励(独立电源)呈一次函数关系。

(2) 当一个独立电源单独作用时, 其余独立电源做零处理, 即保留内阻, 理想电压源用短路替代, 理想电流源用开路替代, 而电路其他结构不变。

(3) 不能用叠加定理直接来计算功率。因为功率是电压和电流的乘积, 不是电压、电流的一次函数。

(4) 应用叠加定理求电压和电流时是代数数量的叠加, 要特别注意各代数数量的符号。即注意在各电源单独作用时计算的电压、电流参考方向是否与原电路一致, 一致时相加, 反之相减。

(5) 在使用叠加定理分析含受控源的(线性)电路时, 受控源不能单独作用, 而应把受控源作为一般元件始终保留在电路中, 因为受控电压源的电压和受控电流源的电流受电路结构和元件参数制约。

(6) 叠加的方式是任意的, 可以一次使一个独立源单独作用, 也可以一次使几个独立源同时作用, 方式的选择取决于分析问题的方便。

例 2.11 如图2.21(a)所示电路, 应用叠加定理求电压 U 。

解: 电压源 U_S 单独作用时电路如图 2.21(b) 所示。应用电阻串联分压公式, 得

$$U'_1 = \frac{3}{3+6} \times 36 = 12 \text{ V}$$

$$U'_2 = -\frac{12}{6+12} \times 36 = -24 \text{ V}$$

则

$$U' = U'_1 + U'_2 = 12 + (-24) = -12 \text{ V}$$

电流源 I_S 单独作用时电路如图 2.21(c) 所示。应用电阻串、并联等效及欧姆定理, 得

$$U'' = [6 // 3 + 6 // 12] \times 3 = 18 \text{ V}$$

故得电压

$$U = U' + U'' = -12 + 18 = 6 \text{ V}$$

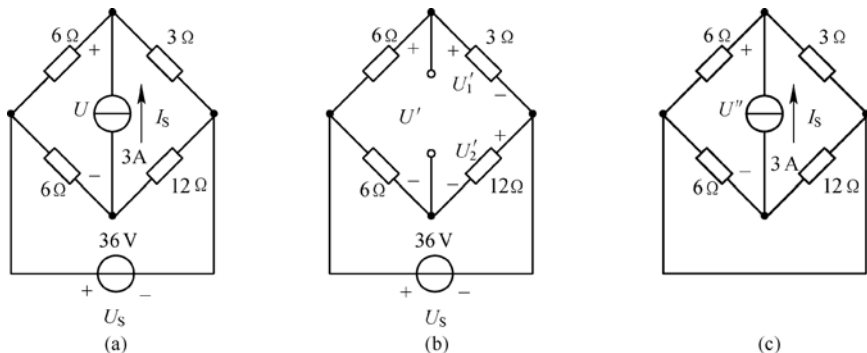


图 2.21 例 2.11 图

例 2.12 用叠加定理求图 2.22(a) 所示电路中的电压 U_1 。

解：这是一个含有受控源的电路。按叠加定理，分别做出电流源单独作用的电路如图 2.22(b) 所示，电压源单独作用的电路如图 2.22(c) 所示。

在图 2.22(b)、(c) 中，都将受控电压源保留在了原处，相应的控制量分别标为 U'_1 和 U''_1 。

对于图 2.22(b)，根据基尔霍夫电流定律，可列出节点电流方程

$$\frac{U'}{2} + \frac{U'_1 - 2U'_1}{3} = 2$$

解得

$$U' = 12 \text{ V}$$

对于图 2.22(c)，根据基尔霍夫电压定律，可列出回路电压方程

$$2U''_1 = U''_1 + \frac{3 \times U''_1}{2} + 4$$

解得

$$U''_1 = -8 \text{ V}$$

所以

$$U_1 = U'_1 + U''_1 = 12 - 8 = 4 \text{ V}$$

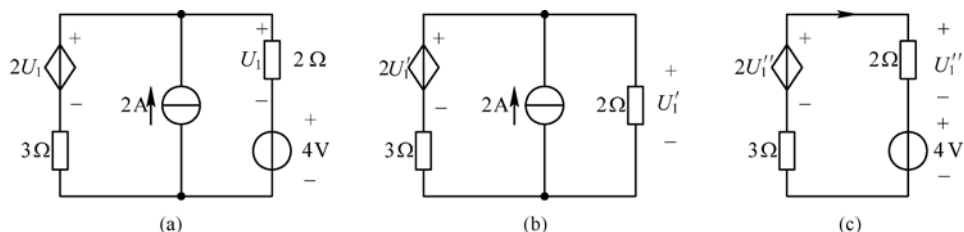


图 2.22 例 2.12 图

2.3.2 替代定理

替代定理（又称置换定理）可表述为：具有唯一解的电路中，若已知某支路 k 的电压为 U_k ，电流为 I_k ，且该支路 k 与网络中的其他支路无耦合，则不论该支路的组成如何，都可用电压等于 U_k 且方向相同的理想电压源或电流等于 I_k 且方向相同的理想电流源去替代，替代后电路中的全部电压和电流保持不变。

在分析电路时，常用替代定理化简电路。对于替代定理的使用有以下几点需要说明：

(1) 替代定理对线性、非线性、时变、非时变的电路均适用。

(2) “替代”与“等效变换”是两个不同的概念，不可混淆。“替代”是用理想电源替代已知电压或电流的支路元件，电路中没有被替代的部分的结构和元件参数是不允许变动的，因为一旦变动，原来已知的电压或电流便成了未知；而“等效变换”则是两个具有相同端口伏安特性的电路间的相互转换，与变换以外电路的拓扑结构和元件参数无关。

(3) 不仅可以用电压源或电流源替代已知电压或电流的支路，而且可以替代已知端口电压或端口电流的二端网络。

例 2.13 已知 $I_1 = 1 \text{ A}$ ， $I_2 = 1 \text{ A}$ ，用替代定理求图 2.23(a) 所示电路中的电压 U_S 。

解：根据替代定理，图 2.23(a) 可以画成如图 2.23(b) 所示电路，因为 $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ ，由图 2.23(b) 可知，流过 U_S 路的电流为 0，则

$$U_S = I_2 \times 6 + 6 = 6 + 6 = 12 \text{ V}$$

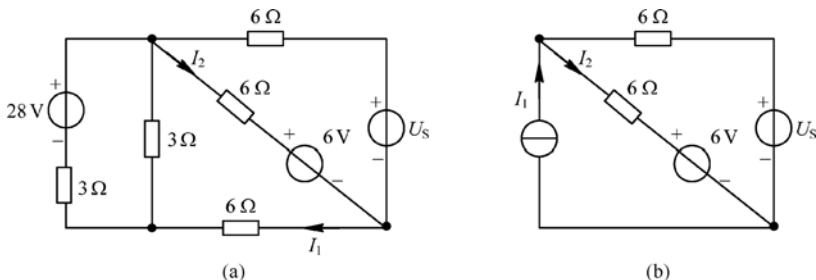


图 2.23 例 2.13 图

2.3.3 戴维南定理

在很多情况下, 我们只对复杂电路中某一条支路的电压、电流和功率感兴趣, 而对电路中其他部分的情况并不关心, 对所研究的支路, 电路的其余部分就成为一个有源二端网络。这时, 就不一定要整体求解电路, 可以先化简电路, 把不需要计算其电压、电流的那一部分电路, 用一个尽可能简单的等效电路来替代, 从而使分析和计算简化。戴维南(Thevenin)定理和诺顿(Norton)定理就是如何将一个线性有源二端网络等效成一个电源模型的重要定理, 所以称为等效电源定理。

戴维南定理用来把复杂的线性有源二端网络等效为一个电压源与电阻串联的电源模型。定理内容可表述为: 如图2.24(a)所示任一线性有源二端网络 N , 对其外部电路来说, 都可以用电压源和电阻串联组合等效代替, 如图2.24(b)所示; 该电压源的电压等于网络的开路电压 U_{OC} , 该电阻等于网络内部所有独立源作用为零情况下网络的等效电阻 R_0 。由戴维南定理所得的电压源等效电路称为戴维南等效电路。

计算开路电压 U_{OC} 时, 先将外电路断开, 设定 U_{OC} 参考方向, 根据具体电路形式, 选择前面所讲述的各种分析方法, 如等效变换法、节点电压法、网孔电流法等来求解。

计算等效电阻 R_0 时, 常用下列方法:

(1) 直接法: 应用等效变换方法(如串、并联等效或三角形与星形网络变换等)直接求出无源二端网络的等效电阻。

(2) 外加电源法: 使网络 N 中所有独立源均为零值, 即理想电压源短路, 理想电流源开路, 注意受控源不能作同样处理, 受控源要保留, 得到一个无源二端网络 N_0 , 然后在 N_0 两端外加电源。若加电压源 U , 如图2.25(a)所示, 计算端子上的电流 I (I 、 U 对二端网络 N_0 来说参考方向关联); 若加电流源 I , 如图2.25(b)所示, 计算端子间电压 U ; 则端子间等效电阻为

$$R_{ab} = R_0 = \frac{U}{I}$$

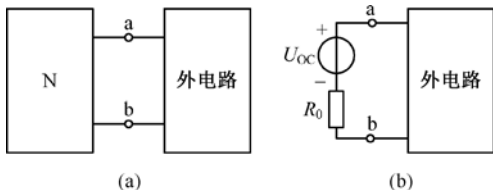


图 2.24 戴维南定理示意图

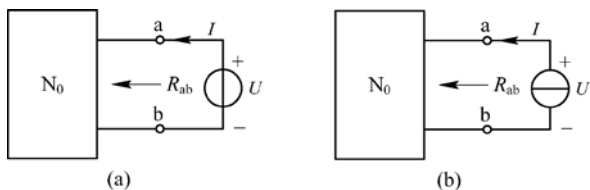


图 2.25 外加电源法求内阻

(3) 开路、短路法: 分别求出有源网络 N 的开路电压 U_{OC} , 如图 2.26(a) 所示; 以及短路电流 I_{SC} , 如图 2.26(b) 所示(注意: 此时有源网络 N 内所有独立源和受控源均保留不变)。若开路电压 U_{OC} 参考方向是 a 为高电位端, I_{SC} 参考方向设为从 a 流向 b , 则等效内阻

$$R_0 = \frac{U_{OC}}{I_{SC}}$$

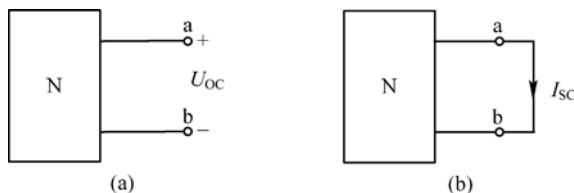


图 2.26 求开路电压和短路电流电路

例 2.14 用戴维南定理求图 2.27(a) 所示电路中的电流 I 和电压 U 。

解: 根据戴维南定理, 将 R 支路以外的其余部分所构成的二端网络, 用一个电压源 U_{OC} 和电阻 R_0 相串联去等效代替。

(1) 求 U_{OC} : 将 R 支路断开, 如图 2.27(b) 所示。用叠加定理可求得

$$U_{OC} = \frac{2}{2+2+2+2} \times 2 + \frac{2+2+2}{2+2+2+2} \times 1 \times 2 = 2 \text{ V}$$

(2) 求 R_0 : 将两个独立源变为零值, 即将 2 V 电压源短路, 而将 1 A 电流源开路, 如图 2.27(c) 所示。可求得

$$R_0 = \frac{2 \times (2+2+2)}{2+2+2+2} = 1.5 \Omega$$

(3) 根据所求得的 U_{OC} 和 R_0 , 可做出戴维南等效电路, 接上 R 支路如图 2.27(d) 所示, 即可求得

$$I = \frac{U}{R_0 + R} = \frac{2}{1.5 + 1.5} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

$$U = RI = 1.5 \times \frac{2}{3} = 1 \text{ V}$$

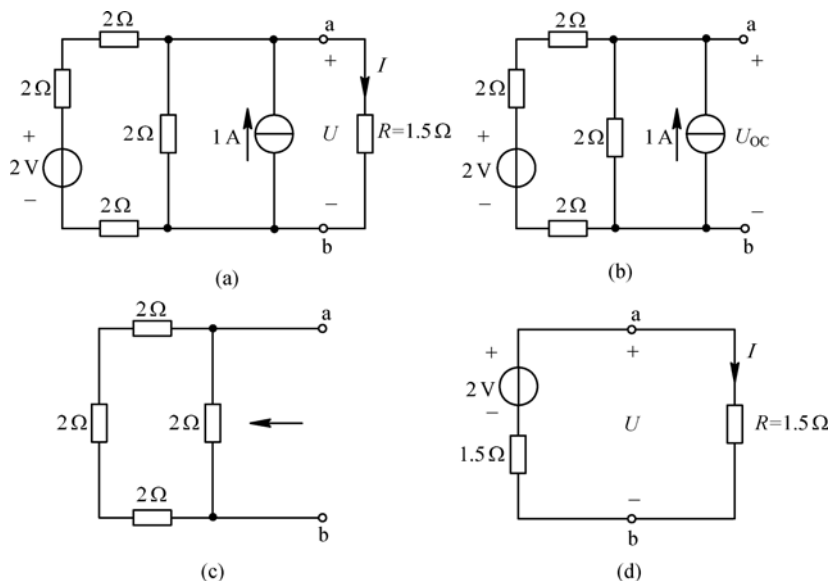


图 2.27 例 2.14 图

例 2.15 用戴维南定理求图 2.28(a) 所示电路中的电流 I_1 。

解：先将 9Ω 支路断开，并将 CCCS 变换成 CCVS，如图 2.28 (b) 所示。

$$U_{OC} = 16I' + 2I'$$

$$I' = \frac{20 - 16I'}{2 + 2} = \frac{20 - 16I'}{4}, \text{ 即 } 4I' = 20 - 16I'$$

则

$$I' = 1 \text{ A}$$

所以

$$U_{OC} = 18 \text{ V}$$

求短路电流 I_{SC} ，由图 2.28 (c)，用节点电压法可得

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8.8}\right)U_1 = 10 + 8I''$$

$$I'' = \frac{20 - U_1}{2}$$

所以

$$U_1 = 17.6 \text{ V}$$

则

$$I_{SC} = \frac{U_1}{8.8} = 2 \text{ A}$$

由所求 U_{OC} 和 I_{SC} 求 R_0

$$R_0 = \frac{U_{OC}}{I_{SC}} = \frac{18}{2} = 9 \Omega$$

等效电压源电路如图 2.28 (d) 所示，于是得

$$I_1 = \frac{U_{OC}}{R_0 + 9} = \frac{18}{9 + 9} = 1 \text{ A}$$

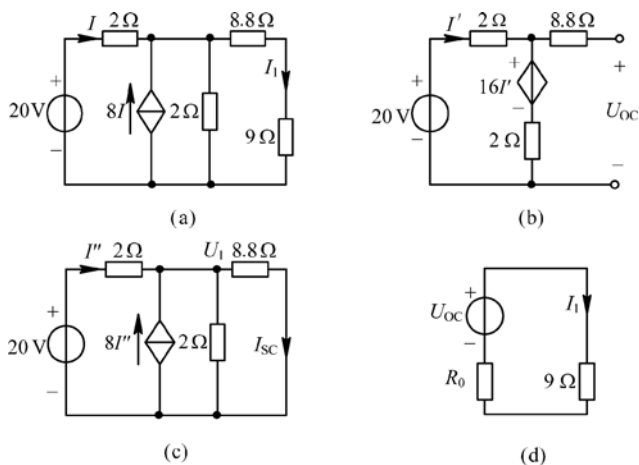


图 2.28 例 2.15 图

2.3.4 诺顿定理

诺顿定理是等效电源定理的另一种形式。诺顿定理用来把复杂的线性有源二端网络等效为一个电流源与电阻并联的电源模型。定理内容可表述为：如图 2.29 (a) 所示任一线性有源二端网络 N，对其外

部电路来说,都可以用电流源和电阻并联组合等效代替,如图2.29(b)所示;该电流源的电流等于网络的短路电流 I_{SC} , 该电阻等于网络内部所有独立源作用为零情况下的网络的等效电阻 R_0 。由诺顿定理所得的电流源等效电路称为诺顿等效电路。

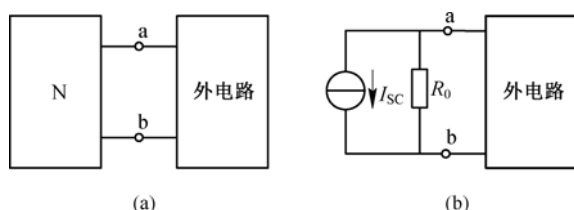


图 2.29 诺顿定理示意图

根据两种实际电源模型的等效变换,由戴维南等效电路即可得到诺顿等效电路,所以诺顿定理是戴维南定理的另一种形式。戴维南等效电路和诺顿等效电路共有开路电压 U_{OC} 、等效电阻 R_0 和短路电流 I_{SC} 三个参数,其关系为 $U_{OC} = R_0 I_{SC}$, 故求出其中任意两个量就可以求得另一个量。凡是戴维南定理能解决的问题,诺顿定理也能解决,其解题步骤与戴维南定理类似。这里不再赘述,通过下面的例子来说明诺顿定理的应用。

例 2.16 利用诺顿定理求图2.30(a)所示电路中的电流 I 。

解: 由图2.30(b)求短路电流

$$I_{SC} = \frac{140}{20} + \frac{90}{5} = 25 \text{ A}$$

由图 2.30(c)求等效电阻 R_0

$$R_0 = 20 // 5 = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4 \Omega$$

根据诺顿定理,图 2.30(a)所示电路对所求电流支路可等效化简为图 2.30(d)所示电路,由图 2.30(d)可得

$$I = \frac{R_0 I_{SC}}{R_0 + 6} = \frac{4 \times 25}{4 + 6} = 10 \text{ A}$$

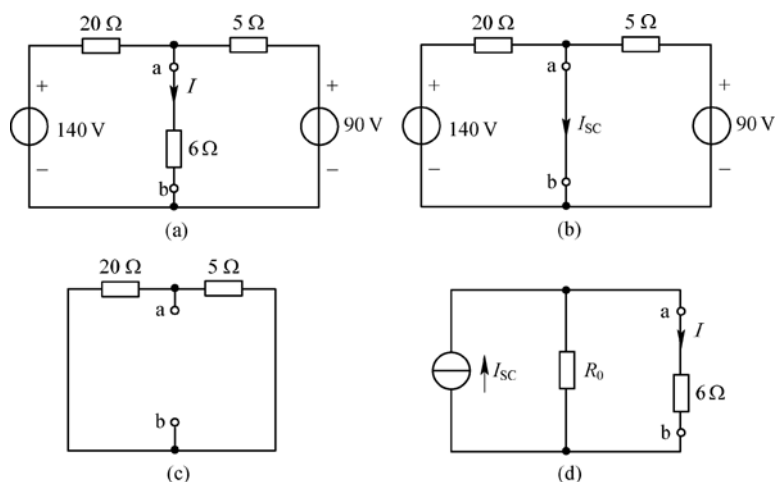


图 2.30 例 2.16 图

例 2.17 利用诺顿定理求图 2.31(a) 所示电路中的电流 I 。

解: 待求支路取掉后, 电路为一个线性含源二端网络, 求这个二端网络的开路电压比求短路电流要复杂, 所以这个电路用诺顿定理求解比用戴维宁定理求解简单。由图 2.31(b) 可得短路电流 I_{SC}

$$I_{SC} = I_1 - I_2 = \frac{9}{9+9} \times 6 - \frac{3}{3+6} \times 6 = 1 \text{ A}$$

由图 2.31(c) 可得等效电阻 R_0

$$R_0 = (3+6) // (9+9) = 9 // 18 = 6 \Omega$$

由图 2.31(d) 的等效电路得

$$I = \frac{R_0 I_{SC}}{R_0 + 6} = \frac{6 \times 1}{6 + 6} = 0.5 \text{ A}$$

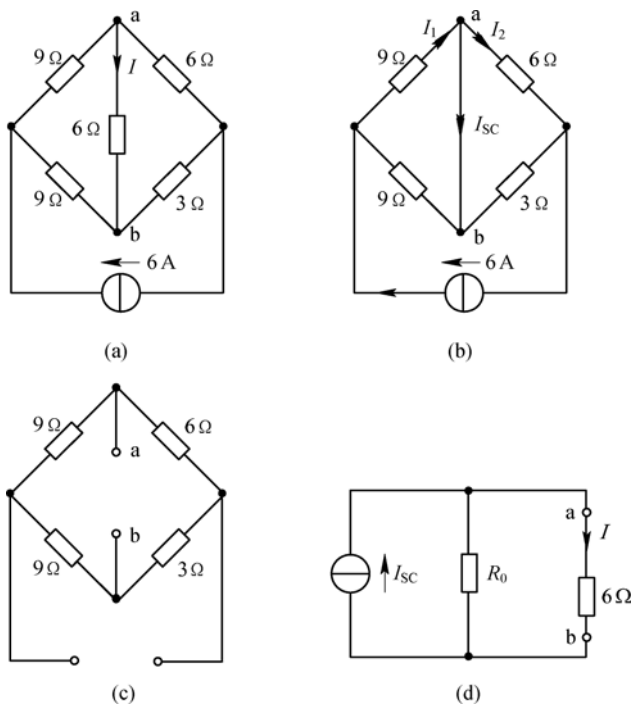


图 2.31 例 2.17 图

2.3.5 最大功率传输定理

在电子技术中, 常常希望负载从电源获得最大功率。

设一线性有源二端网络用戴维南等效电路进行等效, 并在端子处外接负载 R_L , 如图 2.32(a) 所示。从图中可定性看出: 当 $R_L \rightarrow \infty$ 时, 因 $I = 0$, 此时负载不吸收功率; 当 $R_L = 0$ 时, 也不吸收功率。当 R_L 在 $0 \sim \infty$ 范围内变动时, 负载吸收功率, 且随 R_L 的变动而变化: 负载 R_L 吸收的功率 P_L 由零逐渐增大, 然后又逐渐下降到零, 这当中必有最大值存在。对于给定的有源二端网络, 负载满足什么条件时, 才能从网络中获得最大的功率呢? 由图 2.32(a) 可知, 负载获得的功率可表示为

$$P_L = I^2 R_L = \left(\frac{U_{OC}}{R_0 + R_L} \right)^2 R_L \quad (2.27)$$

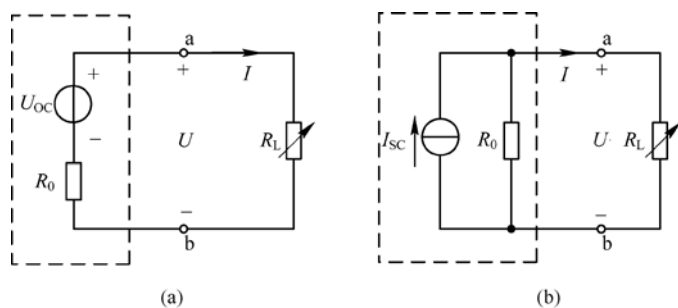


图 2.32 最大功率传输定理

为了求得 R_L 改变时 P_L 的最大值, 将式 (2.27) 对 R_L 求导, 并令其为零, 即

$$\frac{dP_L}{dR_L} = U_{OC}^2 \frac{(R_L + R_0)^2 - 2R_L(R_L + R_0)}{(R_L + R_0)^4} = 0$$

由此可得功率 P_L 为最大时电阻 R_L 的大小为: $R_L = R_0$ 。

即在负载电阻 R_L 与有源二端网络戴维南等效电路的等效电阻 R_0 相等时, 负载电阻 R_L 可获得最大功率, 负载获得的最大功率为

$$P_{Lmax} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0} \quad (2.28)$$

若有源二端网络等效为诺顿等效电路如图 2.32(b), 同样可得当 $R_L = R_0$, R_L 可获得最大功率, 且最大功率为

$$P_{Lmax} = \frac{1}{4} R_0 I_{SC}^2 \quad (2.29)$$

通常, 称 $R_L = R_0$ 为最大功率匹配条件。

从式 (2.28)、式 (2.29) 不难看出, 求解最大功率传输问题的关键在于求有源二端网络戴维南等效电路或诺顿等效电路。

应当注意的是, 不要把最大功率传输定理理解为: 要使负载功率最大, 应使实际电源的等效内阻 R_0 等于 R_L 。必须指出: 由于 R_0 为定值, 要使负载获得最大功率, 必须调节负载电阻 R_L (而不是调节 R_0) 才能使电路处于匹配工作状态。

例 2.18 求图 2.33(a) 所示电路中 R_L 为何值时能取得最大功率, 该最大功率是多少?

解: 断开 R_L 支路用叠加定理求开路电压 U_{OC} 。16 V 电压源单独作用时, 如图 2.33(b) 所示, 根据分压关系, 有 U'_{OC}

$$U'_{OC} = \frac{16}{8+4+20} \times (4+20) = 12 \text{ V}$$

1 A 电流源单独作用时, 如图 2.33(c) 所示, 根据分流关系, 有

$$I = \frac{20}{8+4+20} \times 1 = \frac{5}{8} \text{ A}$$

$$U''_{OC} = -\frac{5}{8} \times 8 - 1 \times 3 = -8 \text{ V}$$

所以 $U_{OC} = U'_{OC} + U''_{OC} = 12 - 8 = 4 \text{ V}$

将 16 V 电压源和 1 A 电流源均变为零, 如图 2.33(d) 所示, 可得

$$R_0 = 3 + \frac{8 \times (4 + 20)}{8 + 4 + 20} = 9 \Omega$$

根据求出的 U_{OC} 和 R_0 做出戴维南等效电路, 并接上 R_L , 如图 2.33(e) 所示, 根据最大功率传输定理可知, 当 $R_L = R_0 = 9 \Omega$ 时, 可获得最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0} = \frac{4^2}{4 \times 9} = \frac{4}{9} \text{ W}$$

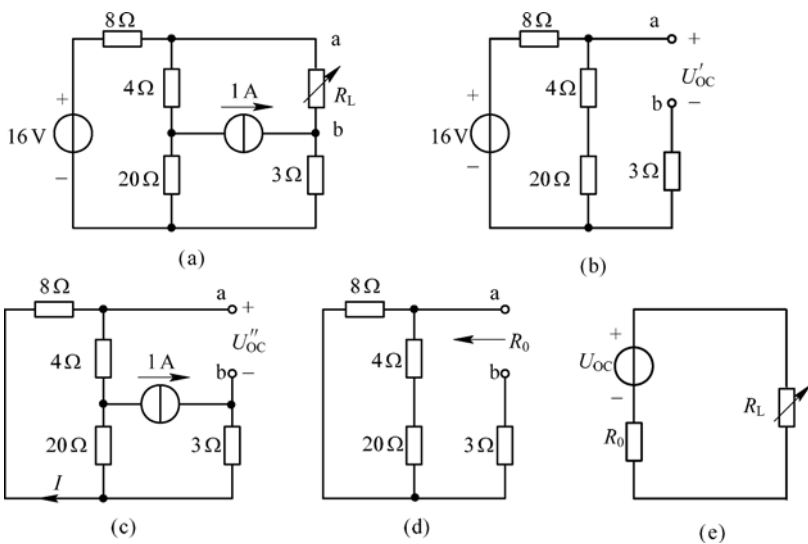


图 2.33 例 2.18 图

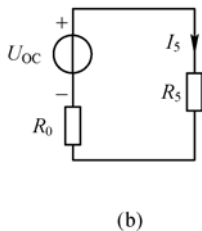
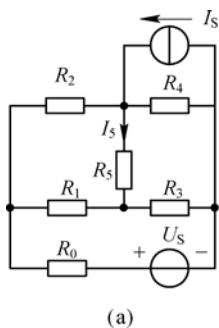
例 2.19 在图 2.34(a) 所示电路中, 若已知: 当 $R_5 = 8 \Omega$ 时, $I_5 = 20 \text{ A}$; 当 $R_5 = 2 \Omega$ 时, $I_5 = 50 \text{ A}$, 问 R_5 为何值时, 它消耗的功率最大? 此时最大功率为多少?

解: 根据戴维南定理, 可将 R_5 支路以外的其余部分所构成的有源二端网络用一个电压源 U_{OC} 和电阻 R_0 相串联去等效代替, 如图 2.34(b) 所示, 则有

$$\frac{U_{OC}}{R_0 + R_5} = I_5$$

依题条件可列方程组

$$\begin{cases} \frac{U_{OC}}{R_0 + 8} = 20 \\ \frac{U_{OC}}{R_0 + 2} = 50 \end{cases}$$



解得

$$U_{OC} = 200 \text{ V} \quad R_0 = 2 \Omega$$

图 2.34 例 2.19 图

根据最大功率传输定理可知, 当 $R_5 = R_0 = 2 \Omega$ 时, R_5 可获得最大功率, 为

$$P_{\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0} = \frac{200^2}{4 \times 2} = 5 \text{ kW}$$

2.4 Multisim 直流电路分析

本节主要介绍 Multisim 2001 在直流电路分析中的应用,通过下面的实例进一步熟悉各种电路分析方法,并通过实验仿真验证理论计算和定律的正确性。

例 2.20 在图 2.35(a) 所示电路中,若已知 $U_{S1}=16\text{ V}$, $U_{S2}=16\text{ V}$, $R_1=20\ \Omega$, $R_2=40\ \Omega$, $R_3=40\ \Omega$ 。试用网孔分析法求网孔电流 I_1 、 I_2 。

解: 选择各网孔电流的参考方向为顺时针方向,如图 2.35(a) 所示。计算各网孔的自电阻和相关网孔的互电阻及每一网孔的电源电压。

按式 (2.23) 列网孔方程组

$$\begin{cases} 60I_1 - 40I_2 = 16 \\ -40I_1 + 80I_2 = -16 \end{cases}$$

求解网孔方程组得

$$I_1 = 0.2\text{ A}, I_2 = -0.1\text{ A}$$

在 Multisim 2001 电路窗口中创建如图 2.35(b) 所示的电路,启动仿真,图 2.35(b) 中电流表的读数分别为 0.200 A 和 -0.100 A ,为两网孔网孔电流 I_1 和 I_2 。可见,理论计算与电路仿真结果是相同的。

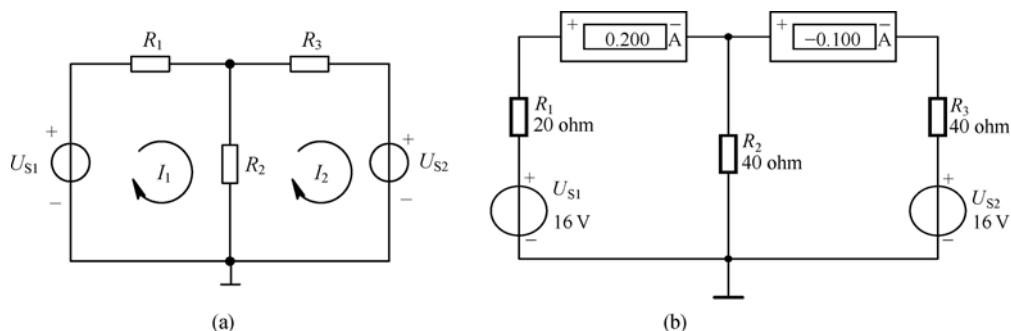


图 2.35 例 2.20 图

节点电压法是以节点电压为变量列 KCL 方程求解电路的方法。当电路比较复杂时,节点电压法的计算步骤非常繁琐,利用 Multisim 2001 可以快速、方便地仿真计算出各个节点的电压。

例 2.21 在图 2.36(a) 所示电路中,若已知 $U_{S1}=15\text{ V}$, $U_{S2}=20\text{ V}$, $R_1=5\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $R_3=10\ \Omega$, $R_4=20\ \Omega$, $R_5=20\ \Omega$, 试用节点电压法求节点 1、节点 2 的电压 U_1 、 U_2 。

解: 取节点 3 为参考节点,由电路图可以直接写出电路的节点电压方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)U_1 - \frac{1}{10}U_2 = \frac{15}{5} \\ -\frac{1}{10}U_1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right)U_2 = \frac{20}{20} \end{cases}$$

解得

$$U_1 = 10\text{ V}, U_2 = 10\text{ V}$$

在 Multisim 2001 电路窗口中创建如图 2.36(b) 所示的电路, 启动仿真, 图 2.36(b) 中电压表的读数为节点 1、节点 2 的电压 U_1 、 U_2 , 且都为 10.000 V。可见, 理论计算与电路仿真结果是相同的。

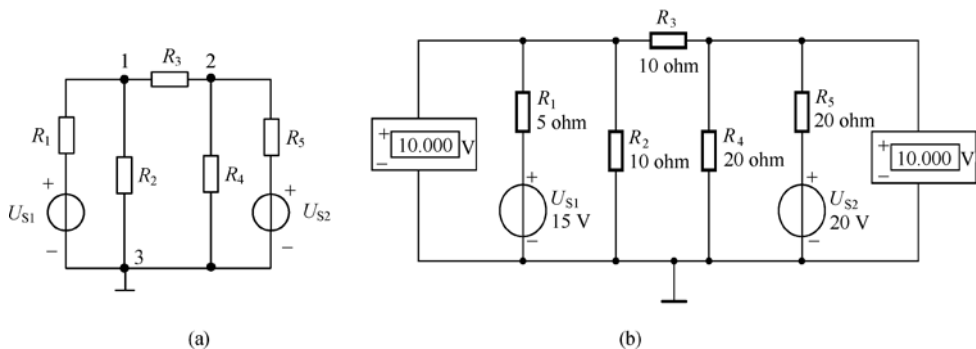


图 2.36 例 2.21 图

例 2.22 在图 2.37(a) 所示电路中, 若已知 $U_S = 15\text{ V}$, $I_S = 3\text{ A}$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, 试用叠加原理求流过电阻 R_2 的电流 I 及其两端的电压 U 。

解: 在 Multisim 2001 电路窗口中创建如图 2.37(b)、(c)、(d) 所示的电路, 启动仿真, 图 2.37(b) 中电流表、电压表的读数为电流源和电压源同时作用时流过电阻 R_2 的电流 I 及其两端的电压 U , 且 $I = 3\text{ A}$, $U = 15\text{ V}$; 图 2.37(c) 中电流表、电压表的读数为电流源单独作用时流过电阻 R_2 的电流 I_1 及其两端的电压 U_1 , 且 $I_1 = 2.4\text{ A}$, $U_1 = 12\text{ V}$; 图 2.37(d) 中电流表、电压表的读数为电压源单独作用时流过电阻 R_2 的电流 I_2 及其两端的电压 U_2 , 且 $I_2 = 0.6\text{ A}$, $U_2 = 3\text{ V}$ 。可见, $U = U_1 + U_2$, $I = I_1 + I_2$, 电路仿真结果与理论计算是相同的, 从而验证了叠加定理的正确性。

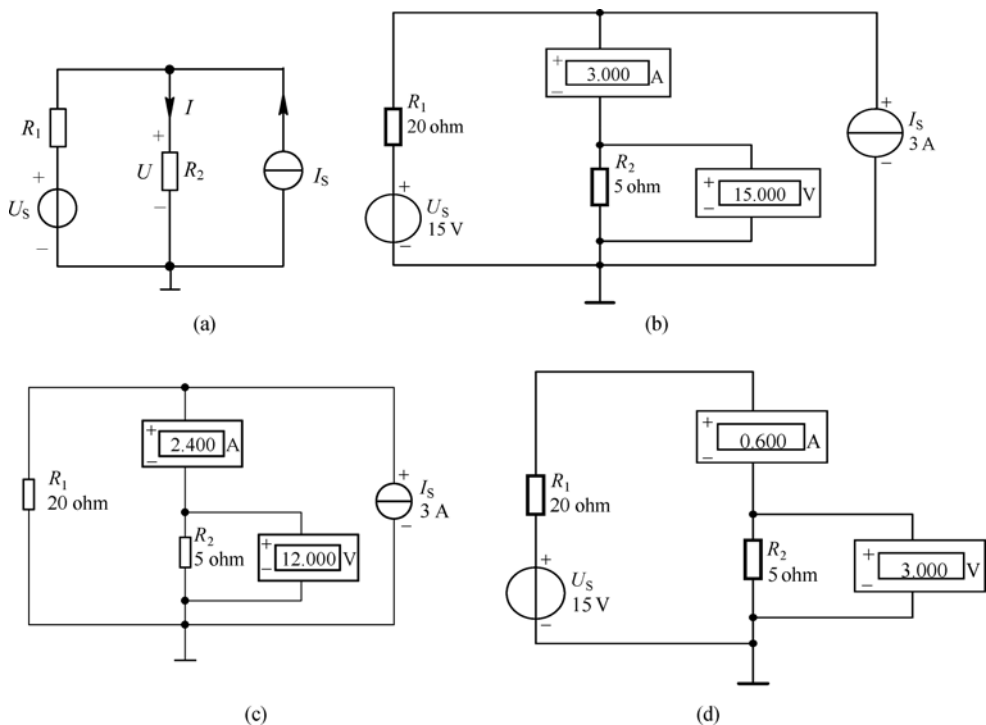


图 2.37 例 2.22 图

例 2.23 在图 2.38(a) 所示电路中, 若已知 $U_S = 12\text{ V}$, $R_1 = 40\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 60\ \Omega$ 。试用戴维南定理求流过电阻 R_4 的电流 I 。

解: 在 Multisim 2001 电路窗口中创建如图 2.38(b)、(c)、(d) 和 (e), 图 2.38(b) 中电压表的读数为开路电压 U_{OC} , $U_{OC} = 6\text{ V}$; 图 2.38(c) 中万用表的读数为等效电阻 R_0 , 且 $R_0 = 60\ \Omega$; 图 2.38(d) 为由电压源 U_{OC} 和等效电阻 R_0 构成的戴维南等效电路, 其电流表的读数就是流过 R_4 的电流 I , $I = 0.05\text{ A}$ 。图 2.38(e) 电路中电流表的读数为戴维南等效之前流过电阻 R_4 的电流 I , $I = 0.05\text{ A}$ 。可见, 戴维南等效前后流经电阻 R_4 的电流相等, 从而验证了戴维南定理的正确。

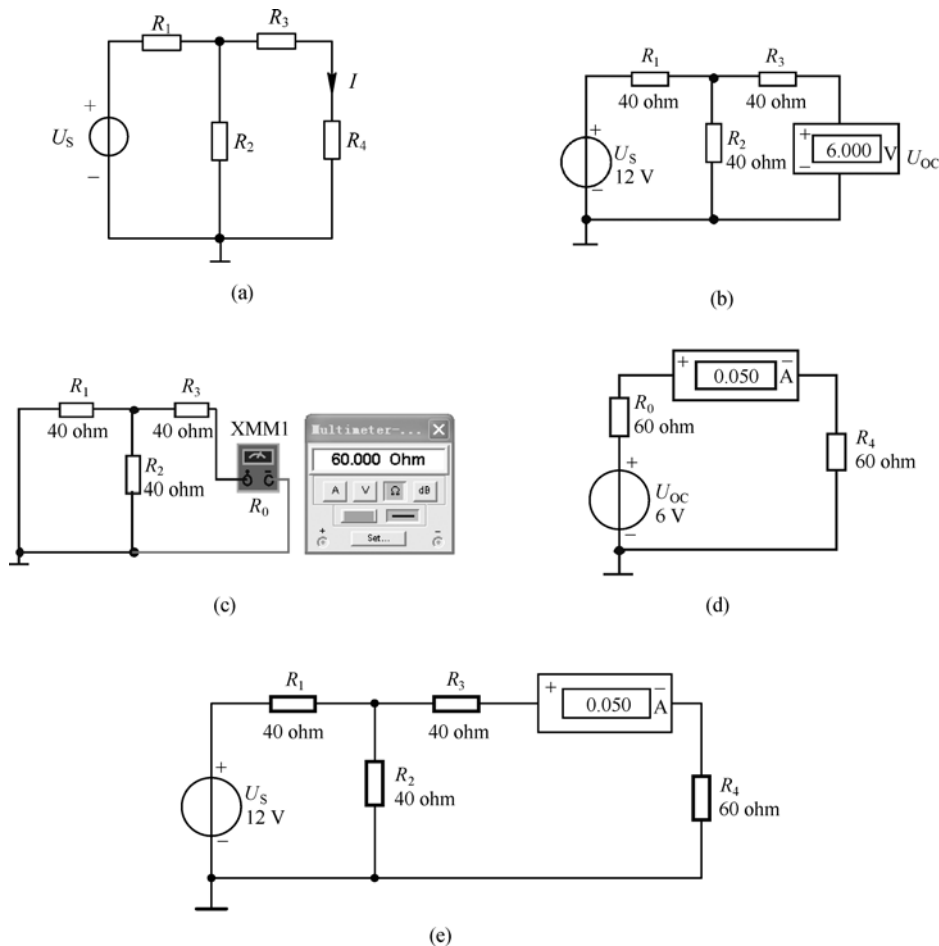


图 2.38 例 2.23 图

例 2.24 在图 2.39(a) 所示电路中, 若已知 $U_S = 20\text{ V}$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$ 。试用诺顿定理求流过电阻 R_4 的电流 I 。

解: 在 Multisim 2001 电路窗口中创建如图 2.39(b)、(c)、(d) 和 (e), 图 2.39(b) 中电流表的读数为短路电流 I_{SC} , $I_{SC} = 0.200\text{ A}$; 图 2.39(c) 中万用表的读数为等效电阻 R_0 , 且 $R_0 = 50\ \Omega$; 图 2.39(d) 为由电流源 I_{SC} 和等效电阻 R_0 构成的诺顿等效电路, 其电流表的读数就是流过 R_4 的电流 I , $I = 0.167\text{ A}$ 。图 2.39(e) 电路中电流表的读数为诺顿等效之前流过电阻 R_4 的电流 I , $I = 0.167\text{ A}$ 。可见, 诺顿等效前后流经电阻 R_4 的电流相等, 从而验证了诺顿定理的正确。

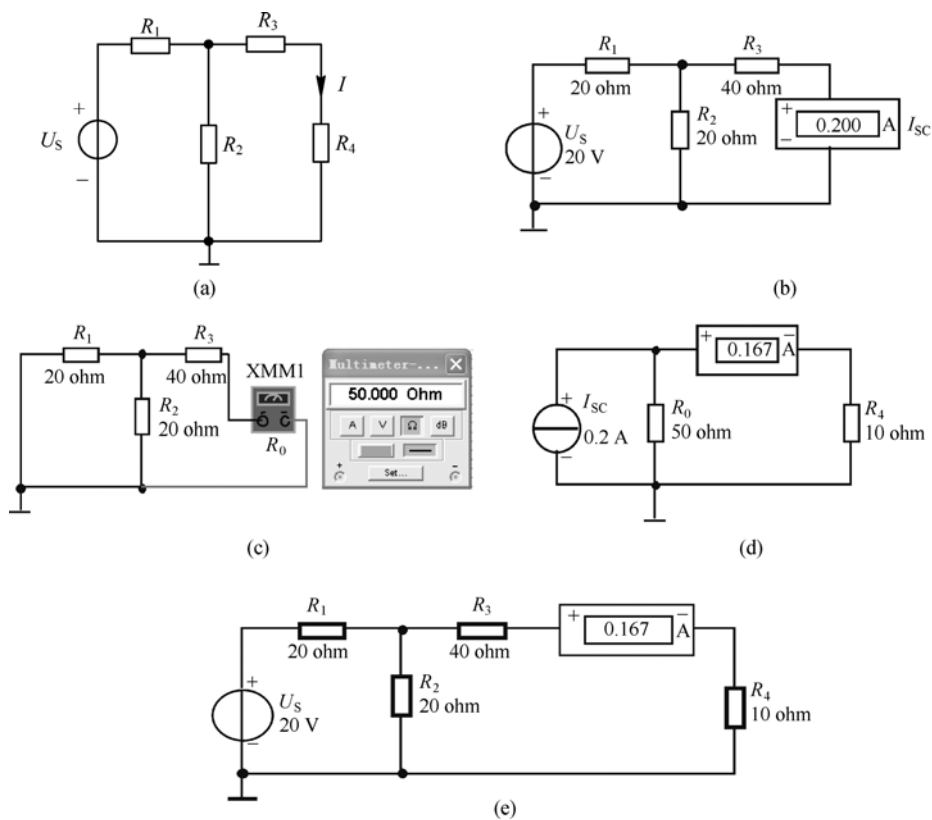


图 2.39 例 2.24 图

小结

1. 直流电路的等效变换分析法

① 电阻串、并联的等效化简

两电阻串联 $R_{eq} = R_1 + R_2$

分压公式为 $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$, $U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$

两电阻并联 $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

分流公式为 $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$, $I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$

② Y-Δ 等效变换

利用 Y-Δ 等效变换可以使 Y 型(或 Δ 型)连接的复杂电阻电路变成能用电阻串、并联化简的简单电路。

$$\Delta - Y : R_i = \frac{\text{三角形网络中与端子 } i \text{ 相连的两电阻的乘积}}{\text{三角形网络电阻之和}}$$

$$Y - \Delta : R_{ij} = \frac{\text{星形网络电阻两两乘积之和}}{\text{星形网络中与电阻 } R_{ij} \text{ 相对端子连接的电阻}}$$

③ 含独立电源网络的等效变换

一个具有内阻 R_S 的实际电源, 可以选用电压源模型或电流源模型来表征, 即两种电源模型对外电路可以等效互换, 其数值关系为 $U_S = R_S I_S$ (或 $I_S = U_S / R_S$)。这是在等效原则下得出的又一结论。这一结论将使我们求解电路时, 思路更广阔、办法更多样。

2. 复杂电路的一般分析方法

① 支路电流法: 以支路电流为待求量, 利用 KCL 对电路列 $n-1$ 个独立的节点电流方程; 利用 KVL 对电路列 $b-(n-1)$ 个独立的回路电压方程; 求解方程组得到各支路电流。此法优点是直观, 所求就是支路电流。缺点是当支路多、变量多时, 求解过程麻烦, 不宜于手工计算。

② 网孔电流法: 以假想的网孔电流为待求量, 列写和网孔个数相同的 KVL 方程, 联立求解网孔电流。此法优点是同一电路所需方程数目较支路电流法少, 列写方程的规律易于掌握, 缺点是不直观。

列写各网孔的 KVL 方程的规则: 本网孔的网孔电流 \times 自电阻 + 所有相邻网孔的网孔电流 \times 互电阻 (当网孔电流流经公共支路时参考方向一致, 互电阻取正号, 反之取负号) = 本网孔电压源的电位升的代数和 (电位升取正号)。

③ 节点电压法: 先选取参考节点, 以独立节点的电压为待求量, 列写各独立节点的电压方程。此法优点是所需方程个数少于支路电流法, 特别是节点少而支路多的电路用此法尤显方便, 列写方程的规律易于掌握。缺点是对于一般给出的电阻参数、电压源形式的电路求解方程工作量较大。

各独立节点的节点电压方程建立的规则: 本节点的节点电压 \times 自电导 - 所有相邻节点的节点电压 \times 互电导 = 流入本节点电流源的代数和 (流入取正号)。

3. 线性电路的基本定理

① 叠加定理: 在线性电路中, 每一个支路中的响应 (电压或电流) 是电路中各个独立电源单独作用时在该支路所产生的响应 (电压或电流) 的代数和。叠加定理是线性电路叠加特性的概括表征, 它的重要性不仅在于可用叠加法分析电路本身, 而且在于它为线性电路的定性分析和一些具体计算方法提供了理论依据。

② 戴维南定理: 任何一个线性含源二端网络, 对外电路来说, 都可以用一个电压源等效代替, 该电压源的源电压等于含源二端网络的开路电压 U_{OC} , 串联的内电阻等于相应的无源二端网络的等效电阻 R_0 。

③ 诺顿定理: 任何一个线性含源二端网络, 对外电路来说, 都可以用一个电流源等效代替, 该电流源的源电流等于含源二端网络的短路电流 I_{SC} , 并联的内电阻等于相应的无源二端网络的等效电阻 R_0 。

戴维南定理、诺顿定理是等效法分析电路最常用的两个定理。解题过程可分为三个步骤: 求开路电压或短路电流; 求等效内阻; 画出等效电源接上待求支路, 由最简等效电路求得待求量。

④ 最大功率传输定理: 阐明了变化的负载为获得最大功率而应当满足的条件。

功率匹配条件: $R_L = R_0$

最大功率公式: $P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0}$ 或 $P_{L\max} = \frac{1}{4} R_0 I_{SC}^2$

习题 2

2.1 求图 2.40 中所示各电路的等效电阻 R_{ab} 。

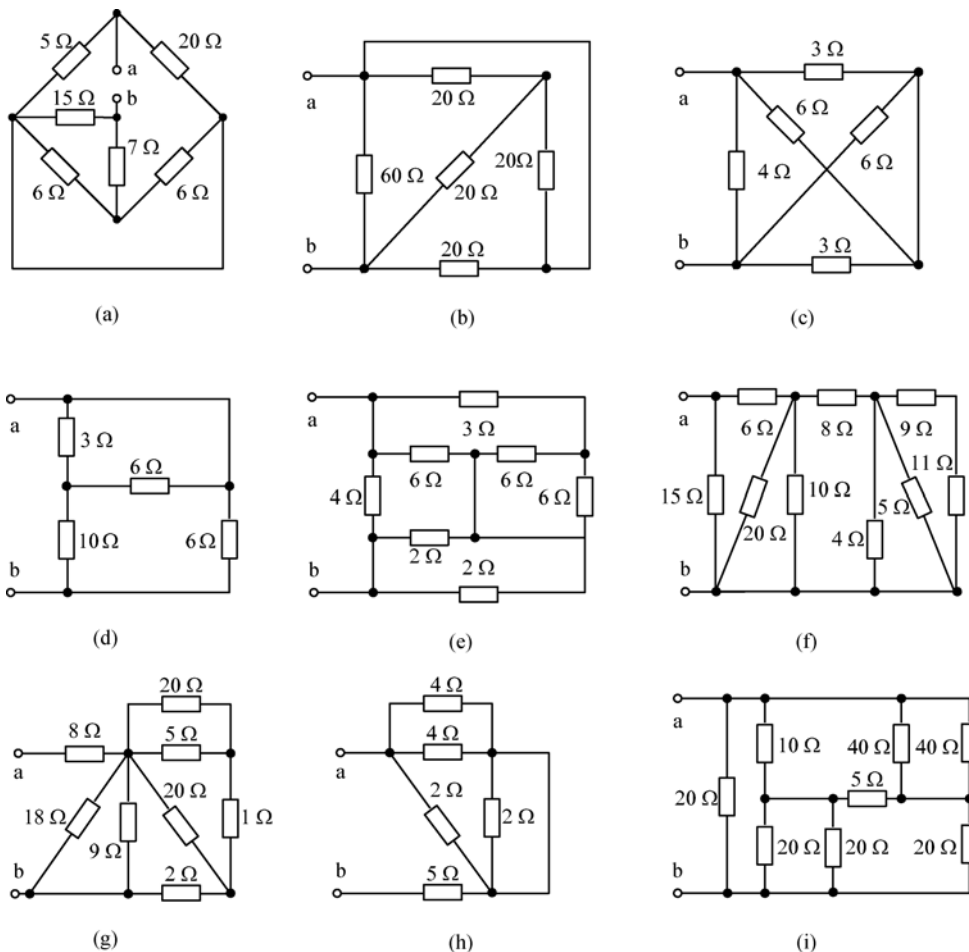


图 2.40

2.2 已知分压电路如图2.41所示, R 为负载电阻。试计算:

- (1) 负载未接入, 即开关 S 打开时分压器的输出电压 U_0 ;
- (2) 负载 $R=150\ \Omega$ 接入后, 分压器的输出电压 U_0 ;
- (3) 负载 $R=15\ \Omega$ 接入后, 分压器的输出电压 U_0 。

2.3 已知电路如图2.42所示, 试计算电压 U 。

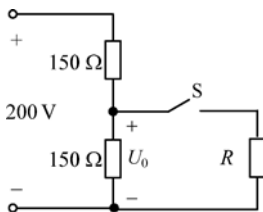


图 2.41

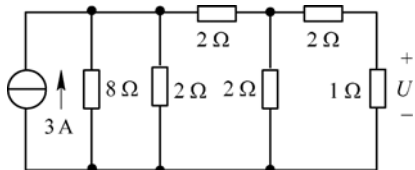


图 2.42

2.4 试计算图 2.43 所示电路中的电流 I 。

2.5 求图 2.44 所示电路中的等效电阻 R_{ab} 和电流 I 。

2.6 试计算图2.45中所示各电路的等效电阻 R_{ab} 。

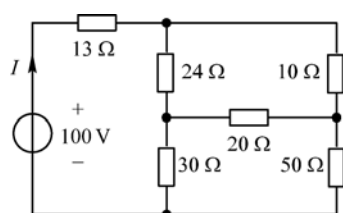


图 2.43

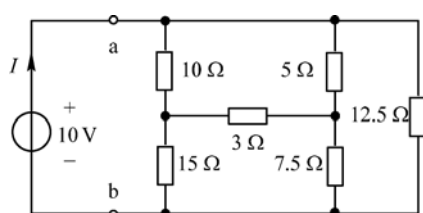
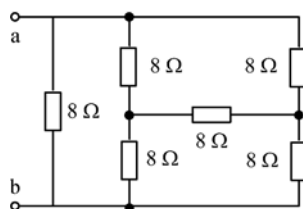
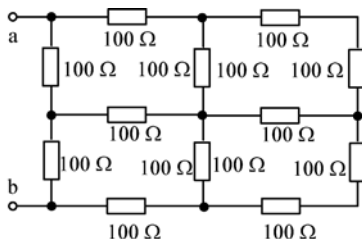


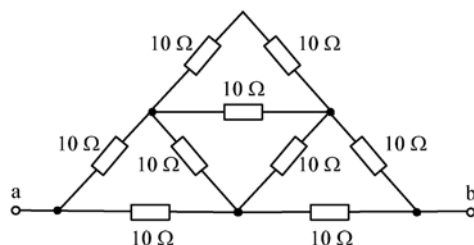
图 2.44



(a)



(b)



(c)

图 2.45

2.7 将图2.46所示各电路对 a、b 端化为最简的等效电压源形式和等效电流源形式。

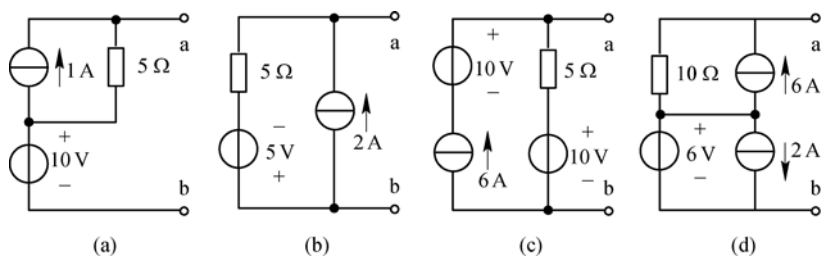


图 2.46

2.8 利用电压源和电流源等效变换的方法，求图 2.47(a) 所示电路中的电流 I_1 、 I_2 、 I_3 和图 2.47(b) 所示电路 2Ω 电阻上的电压 U 。

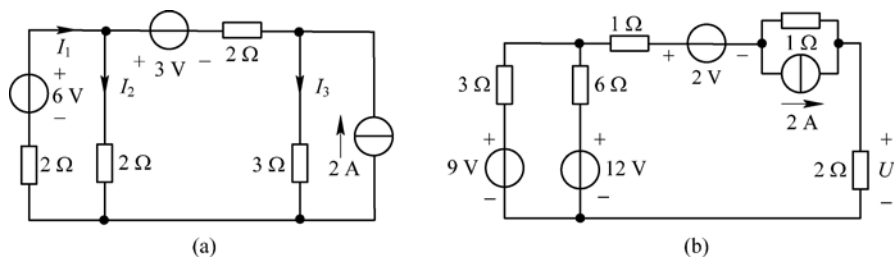


图 2.47

2.9 利用电源等效变换方法, 求图2.48所示电路中的电压 U_{ab} 。

2.10 试用支路电流法求图2.49的支路电流 I_1 、 I_2 、 I_3 。

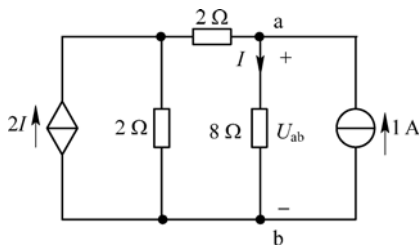


图 2.48

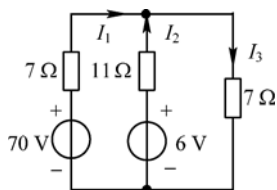
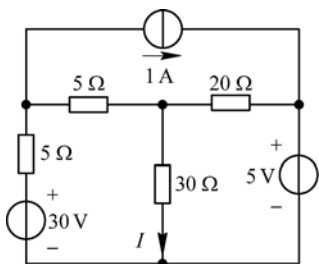


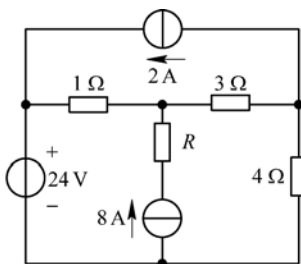
图 2.49

2.11 试用网孔分析法求解图2.50(a)所示电路中的电流 I 和图2.50(b)所示电路中的电压 U 。

2.12 试用网孔分析法求图2.51所示电路中的电压 U_1 。



(a)



(b)

图 2.50

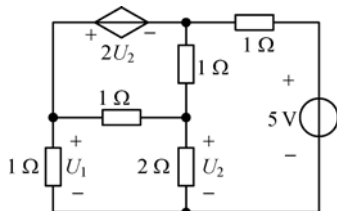
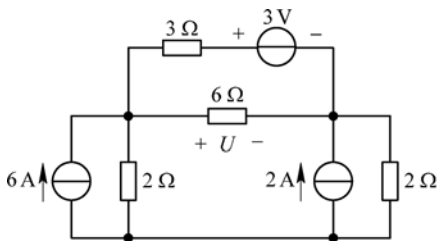
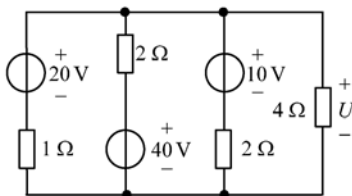


图 2.51

2.13 试用节点电压法求解图2.52所示电路中的电压 U 。



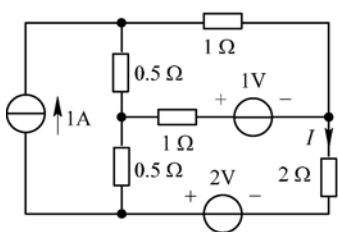
(a)



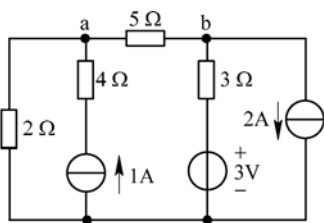
(b)

图 2.52

2.14 试用节点电压法求解图2.53(a)所示电路中的电流 I 和图2.53(b)所示电路中的电压 U_{ab} 。



(a)



(b)

图 2.53

2.15 电路如图2.54所示, 用节点法求 $5\ \Omega$ 电阻消耗的功率。

2.16 电路如图2.55所示, 用节点法和网孔法求各支路上的电流。

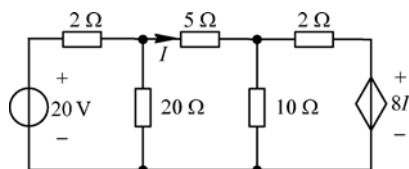


图 2.54

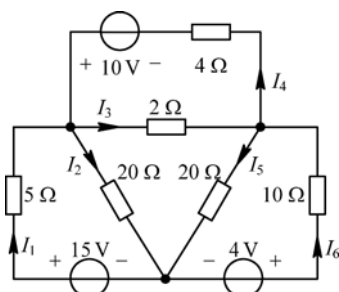
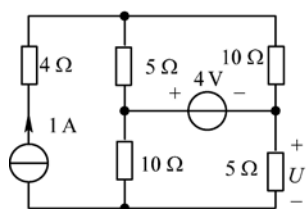
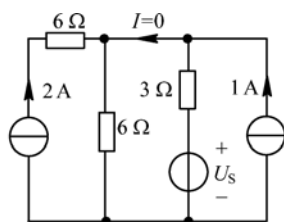


图 2.55

2.17 试用叠加定理求图2.56所示电路的电压 U 和 U_S 。



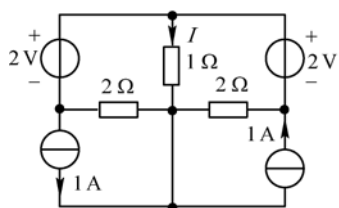
(a)



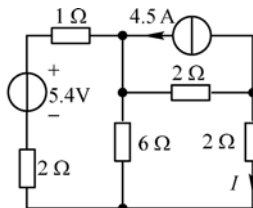
(b)

图 2.56

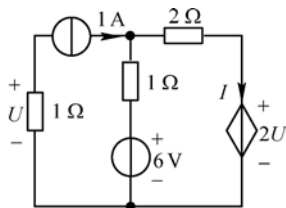
2.18 试用叠加定理求图 2.57 所示电路的电流 I 。



(a)



(b)



(c)

图 2.57

2.19 电路如图 2.58 所示, 当 3 A 电流源断开时, 2 A 电流源输出功率为 28 W , 此时 $U_2 = 8\text{ V}$; 当 2 A 电流源断开时, 3 A 电流源输出功率为 54 W , 此时 $U_1 = 12\text{ V}$ 。求两电流源同时作用时各自的输出功率。

2.20 已知图 2.59 所示电路中流过电阻 R 的电流 $I = 1\text{ A}$ 。试用替代定理求电阻 R 的值。

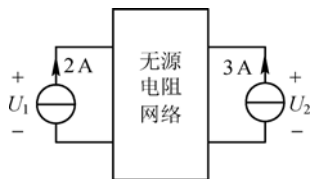


图 2.58

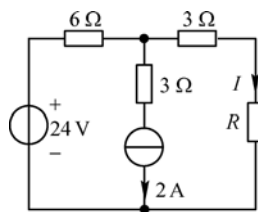


图 2.59

2.21 求图 2.60 所示各含源二端网络的戴维南等效电路。

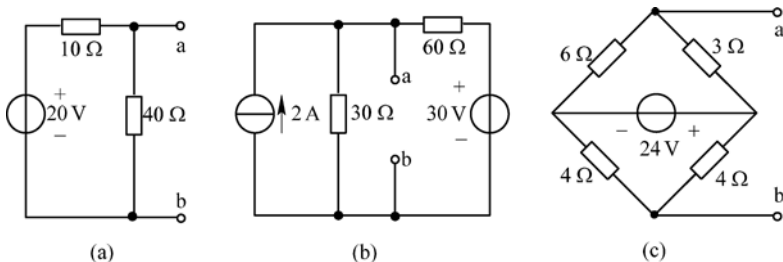


图 2.60

2.22 求图 2.61 所示各含源二端网络的戴维南等效电路。

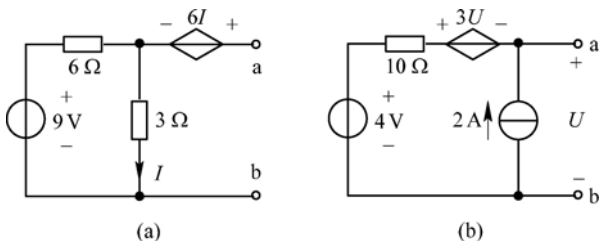


图 2.61

2.23 用戴维南等效定理求图 2.62 所示电路的电流 I 。

2.24 用戴维南等效定理求图 2.63 所示电路的电压 U 。

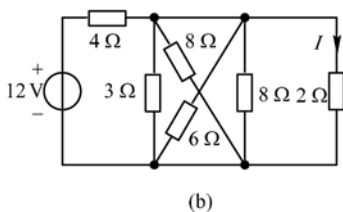
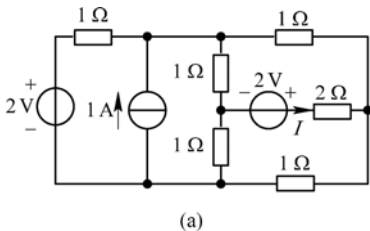


图 2.62

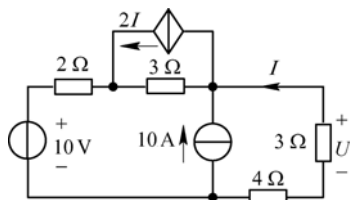


图 2.63

2.25 求图 2.64 所示各含源二端网络的诺顿等效电路。

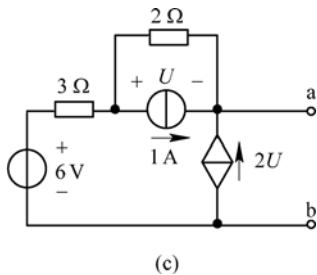
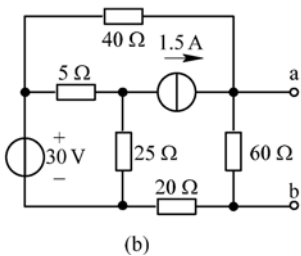
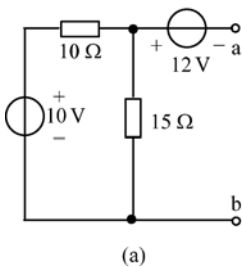


图 2.64

2.26 用诺顿等效定理求图 2.65 所示电路的电流 I 。

2.27 电路如图 2.66 所示，负载电阻 R_L 可任意改变，问 R_L 为何值时其上可获得最大功率，求出该最大功率 $P_{L\max}$ 。

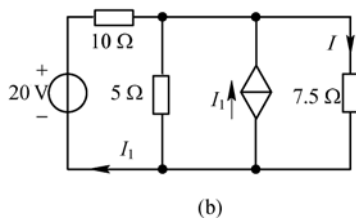
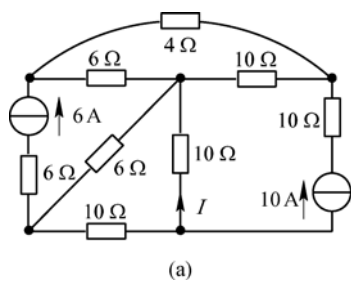


图 2.65

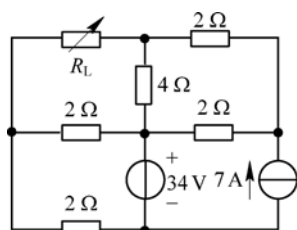


图 2.66

2.28 电路如图 2.67 所示, 已知当负载电阻 $R_L = 4\ \Omega$ 时电流 $I_L = 2\text{ A}$ 。若改变 R_L , 问 R_L 为何值时可获得最大功率, 并求出该最大功率 $P_{L\max}$ 。

2.29 电路如图 2.68 所示, 负载电阻 R_L 可任意改变, 问 R_L 为何值时其上可获得最大功率, 并求出该最大功率 $P_{L\max}$ 。

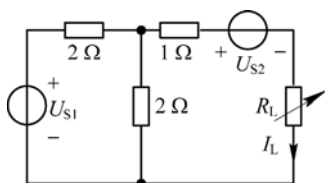


图 2.67

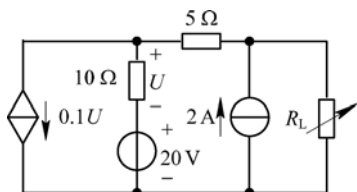


图 2.68

第3章 一阶电路的时域分析

在前面介绍的电阻电路中，各元件的伏安关系为代数关系式，描述电路中激励和响应之间的关系也是一组代数方程，这类电路统称为静态电路。在某一时刻的响应只与该时刻的激励有关，而与过去时刻的激励无关，因此静态电路也是“无记忆”电路。

然而，许多实际电路除了含有电阻和电源外，还可能包含储能元件，即电容和电感，它们的伏安特性具有微分或积分的特征。因此，在电路的连接结构或元件的参数发生变化时，将导致这些储能元件的原有能量发生变化。由于“存储”或“释放”能量不可能在一瞬间完成，因此，电路需要经过一定的时间才能到达一个新的稳定状态。通常将这种具有过渡过程的电路称为动态电路。动态电路的阶数与描述电路的微分方程的阶数有关。用一阶微分方程描述的电路称为一阶电路。

本章主要介绍一阶电路的时域分析方法，详细介绍了一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应，以及一阶电路的三要素公式；最后介绍电路的阶跃响应和冲激响应，以及卷积积分。

3.1 电路的过渡过程及换路定则

3.1.1 电路的过渡过程

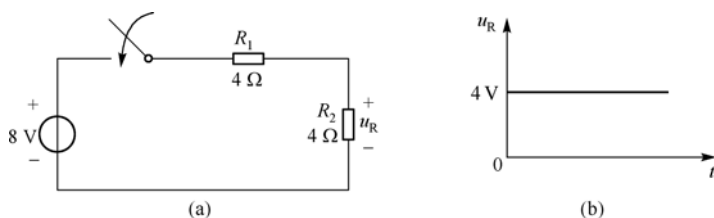
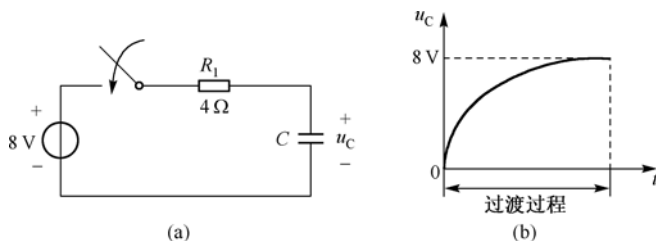
一般来说，当电路接通、断开或者电路元件的参数变化，亦或是电路结构发生变化时，电路中的电流、电压等会随之发生改变，电路从一个稳定状态变化到另一个稳定状态，这个过程称为电路的过渡过程。由于这一过程是在极短暂的时间内完成的，所以又称电路的暂态过程。电路在过渡过程中的工作状态也称为暂态。

电路产生过渡过程的原因不外乎有内因和外因两种。

内因是指电路中有电感、电容等储能元件的存在。事实上，许多实际电路除了由电阻和电源元件构成外，电路中不可避免地要包含电容元件和电感元件。由于这两种元件的伏安关系都体现为对电压或电流的微分或积分，因此也可称它们为动态元件。这些动态元件也是储能元件，对应电路的某一工作状态，电容和电感都会储存一定的能量。当电路的连接方式或元件参数发生改变时，将导致这些储能元件发生充放电的过程，即这些储能元件的能量将发生改变，而能量的“存储”和“释放”是连续、逐渐的，不能瞬间完成，所以需要有一个过程，从而产生过渡过程。

外因是指电路进行了换路。所谓换路，是指电路的状态发生了改变，如作用于电路的电源的接入和撤除，电路元件的接入或其参数的变化，以及电路结构的变动等。

以图3.1中的电路为例。图3.1(a)是一电阻电路，开关闭合后电阻电压 u_R 立即从开关闭合前的零跳变到新的稳态电压值4V，变化过程如图3.1(b)。而图3.2(a)是一个动态电路，开关合下后，电容电压 u_C 从零逐渐变化到新的稳态电压8V，变化过程如图3.2(b)。可以看出，电容电压 u_C 从开关闭合前的稳定状态0V变化到开关闭合后的稳定状态8V，并不是瞬间跳变的，而要经历一个过渡过程。

图 3.1 一个纯电阻电路, 开关闭合后 u_R 立即达到稳态图 3.2 RC 串联电路, 开关闭合后 u_C 经历的过渡过程

3.1.2 电路的换路定则

在分析动态电路时, 由于电路中含有电容或电感元件, 这两种元件的伏安特性是微分或积分关系, 因此所列写的电路方程将含有微分方程。当对微分方程进行求解时, 需要依据初始条件来确定其积分常数。所以, 确定动态电路中电压、电流的初始值, 即确定换路后电压、电流是从什么初始值开始变化的, 是分析动态电路过渡过程的一个重要环节。

设电路在 $t = 0$ 时刻换路, 由于在换路前后的电路可能不同, 可将换路前一瞬间用 $t = 0_-$ 表示, 换路后的一瞬间用 $t = 0_+$ 表示。由此, 确定电路的初始值就是确定在换路后的一瞬间, 即 $t = 0_+$ 时电路中某条支路的电流值或某两点间的电压值, 可用 $u(0_+)$ 和 $i(0_+)$ 表示。

以图 3.3 为例, 电容元件的电压 u_C 和电流 i_C 在关联参考方向下, 其相应的伏安特性为

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

其积分形式为

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt$$

令 $t_0 = 0_-$, 得

$$u_C(t) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_C dt$$

式中, $u_C(0_-)$ 为换路前一瞬间的电容电压值, 为求取换路后一瞬间电容电压的初始值, 取 $t = 0_+$ 代入上式, 得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (3.1)$$

如果换路(开关动作)是理想的, 即不需要时间, 则有 $0_- = 0 = 0_+$; 且在换路瞬间电容电流 i_C 为有限值, 则式(3.1)的积分项为零, 有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (3.2)$$

式(3.2)表明, 换路虽然使电路的工作状态发生改变, 但只要换路瞬间电容电流为有限值, 则电容电压值在换路前后瞬间保持不变, 这也是电容惯性特性的体现。

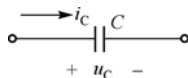


图 3.3 电容元件

以图 3.4 为例, 电感元件的电压 u_L 和电流 i_L 在关联参考方向下, 其相应的伏安特性为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

其积分形式为

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt$$

同理, 令 $t_0 = 0_-$, $t = 0_+$, 则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L dt \quad (3.3)$$

式(3.3)中, $i_L(0_-)$ 为换路前一瞬间的电感电流值, $i_L(0_+)$ 为换路后一瞬间电感电流的初始值。

如果换路(开关动作)是理想的, 即不需要时间, 则有 $0_- = 0 = 0_+$; 且在换路瞬间电感电压 u_L 为有限值, 则式(3.3)的积分项为零, 有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (3.4)$$

式(3.4)表明, 只要换路瞬间电感电压为有限值, 则电感电流值在换路前后瞬间保持不变, 这也是电感惯性特性的体现。

式(3.2)和式(3.4)通称为换路定则。当电路在 $t = 0$ 时换路, 换路定则表示为

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases} \quad (3.5)$$

而当电路在 $t = t_0$ 时换路, 换路定则可进一步表示为

$$\begin{cases} u_C(t_{0+}) = u_C(t_{0-}) \\ i_L(t_{0+}) = i_L(t_{0-}) \end{cases} \quad (3.6)$$

需要指出的是, 换路定则只揭示了换路前后电容电压 u_C 和电感电流 i_L 不能发生突变的规律, 但对于电路中其他的电压和电流, 如电容电流 i_C 和电感电压 u_L 在换路瞬间都是可以突变的。

3.1.3 初始值的确定

在电路的过渡期间, 电路中电压、电流的变化起始于换路后瞬间 $t = 0_+$ 的初始值, 终止于一个新的稳态值。电路中电压、电流初始值可以分为两类: 一类是电容电压和电感电流的初始值, 它们可以直接利用换路定则 $u_C(t_{0+}) = u_C(t_{0-})$ 和 $i_L(t_{0+}) = i_L(t_{0-})$ 求取; 另一类则是电路中其他电压、电流的初始值, 如电容电流、电感电压、电阻电流和电压等, 这类初始值在换路瞬间可以发生跳变, 在求出 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 后, 可以根据基尔霍夫定律、欧姆定律计算 $t = 0_+$ 时刻的电路, 求出相应的数值。其步骤是:

(1) 先求换路前一瞬间的电容电压值 $u_C(0_-)$ 和电感电流值 $i_L(0_-)$ 。若换路前, 电路处于稳定状态, 可将电容开路, 电感短路, 画出换路前 $t = 0_-$ 时刻的等效电路, 进而依据该等效电路求出 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。

(2) 根据换路定则确定 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。

(3) 以 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 为依据, 将电容替换为电压值为 $u_C(0_+)$ 的电压源, 电感替换为电流值为 $i_L(0_+)$ 的电流源, 画出换路后 $t = 0_+$ 时刻的等效电路, 再利用欧姆定律、基尔霍夫定律和直流电路的分析方法确定电路中其他电压、电流的初始值。

例 3.1 如图 3.5 所示, 已知 $U_S = 8 \text{ V}$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, 开关闭合前电路处于稳态, $t = 0$ 时开关 S 闭合。求 $t = 0_+$ 时的 u_C 及各支路电流值。

解: 换路前电路处于稳态, 在直流稳态下电容相当于开路, 等效电路如图 3.6(a)所示, 则

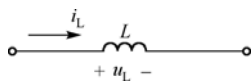


图 3.4 电感元件

$$u_C(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S = 4 \text{ V}$$

根据换路定则有

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 4 \text{ V}$$

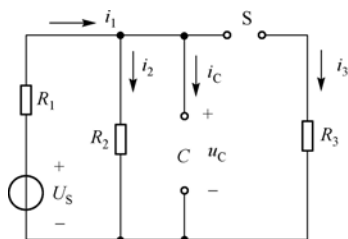
将此值代入 $t = 0_+$ 时刻的等效电路, 此时可以将电容用电压值为 4 V 的理想电压源替代, 如图 3.6(b) 所示。则

$$i_1(0_+) = \frac{U_S - U_C(0_+)}{R_1} = 1 \text{ A}$$

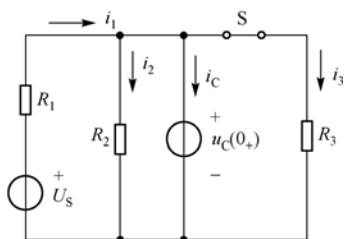
$$i_2(0_+) = \frac{U_C(0_+)}{R_2} = 1 \text{ A}$$

$$i_3(0_+) = \frac{U_C(0_+)}{R_3} = 1 \text{ A}$$

$$i_C(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) = -1 \text{ A}$$



(a) 换路前



(b) $t = 0_+$ 时

图 3.6 例 3.1 的等效电路

例 3.2 如图 3.7 所示, 已知 $U_S = 20 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, 开关 S 闭合前, 电路处于稳态。 $t = 0$ 时开关闭合, 进行换路, 求 S 闭合瞬间各电流和电压 u_L 的初始值。

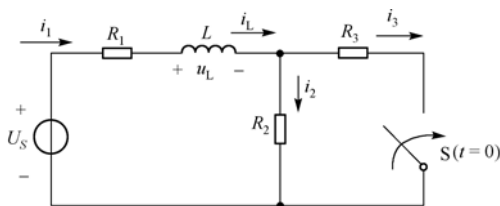
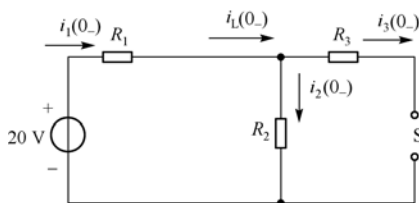


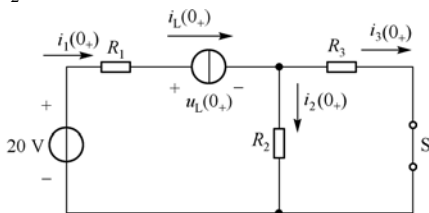
图 3.7 例 3.2 图

解: 在换路前的直流稳态电路中, 电感元件相当于短路, 等效电路如图 3.8(a) 所示, 则

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = 0.5 \text{ A}$$



(a) 换路前



(b) $t = 0_+$ 时

图 3.8 例 3.2 的等效电路

$t = 0$ 时进行换路, 根据换路定则, 有

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0.5 \text{ A}$$

代入换路后 $t = 0_+$ 时的等效电路, 此时可以将电感用一个数值为 0.5 A 的理想电流源所替代, 如图 3.8(b) 所示, 则

$$i_1(0_+) = i_L(0_+) = 0.5 \text{ A}$$

$$i_2(0_+) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_L(0_+) = 0.2 \text{ A}$$

$$i_3(0_+) = i_L(0_+) - i_2(0_+) = 0.3 \text{ A}$$

$$u_L(0_+) = U_S - i_2(0_+)R_2 - i_1(0_+)R_1 = 9 \text{ V}$$

3.2 一阶电路的过渡过程

电路中含有储能元件(动态元件)是引起电路过渡过程的根本原因。若该电路仅包含有一个动态元件(电容或电感), 且动态元件的伏安特性是微分关系, 则描述电路状态的方程是一阶微分方程, 这样的电路称为一阶动态电路, 简称一阶电路。

3.2.1 一阶电路的零输入响应

对于一阶电路而言, 即使电路中没有外加电源, 但由于换路前储能元件已经储存了能量, 因此在换路后电路中仍可出现电压、电流。这种没有外加输入的电路, 仅由初始时刻电容的电场储能或电感的磁场储能所引起的响应称为零输入响应。

1. RC 电路的零输入响应

分析 RC 电路的零输入响应实际上就是分析它的放电过程。已知电路如图 3.9(a) 所示, 原先开关 S 在位置 1 上, 直流电源 U_S 给电容充电, 达到稳态时, 电容电压达到 U_0 。 $t = 0$ 时, 开关 S 由位置 1 转到位置 2, 此时电容与电源断开, 与电阻 R 构成了闭合回路, 如图 3.9(b) 所示。此时, 根据换路定则, 有 $u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_0$, 即使此时 RC 串联回路中没有外加电源, 电路中的电压、电流依然可以靠电容放电产生。由于 R 是耗能元件, 且电路在零输入条件下没有外加激励的能量补充, 电容电压将逐渐下降, 放电电流也将逐渐减小。直至电容的能量全部被电阻耗尽, 电路中的电压、电流也趋向于零, 由此放电完毕, 电路进入到一个新的稳态。

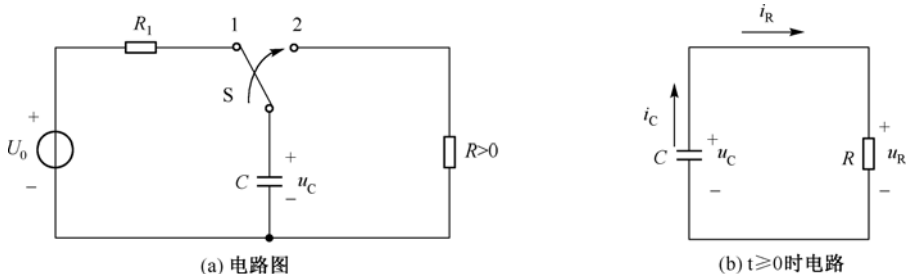


图 3.9 RC 电路的零输入响应

下面做定量的数学分析。

无论是电阻电路还是动态电路, 各支路的电流和电压均受到基尔霍夫定律和元件的伏安特性的约束。对于图 3.9(b), 有

$$u_R - u_C = 0$$

$$u_R = Ri_R$$

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt}$$

将以上三式联立，可求出换路后电容电压 u_C 变化规律，它由一阶常系数线性微分方程表示为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (3.7)$$

由换路定则，换路后电容的初始值为

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_0$$

由高等数学可知，一阶齐次微分方程通解形式为

$$u_C(t) = Ae^{st} \quad (t > 0) \quad (3.8)$$

其中 S 为特征方程 $RCS + 1 = 0$ 的解，因此得

$$S = S_1 = -\frac{1}{RC}$$

故得

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \quad (3.9)$$

待定常数 A 由初始条件确定，有

$$u_C(0_+) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \Big|_{t=0+} = U_0$$

$$A = U_0$$

所以电容电压的零输入响应为

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (t > 0)$$

它是一个随时间衰减的指数函数。当 $t = 0$ 时，即进行换路时， u_C 是连续的，没有跳变。因此表达式 $u_C(t)$ 的时间定义域可以延伸至原点，即

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (t \geq 0) \quad (3.10)$$

显然，换路后电容电压从初始值 U_0 开始，按照指数规律递减，直到最终 $u_C \rightarrow 0$ ，电路达到新的稳态，其波形如图 3.10(a) 所示。

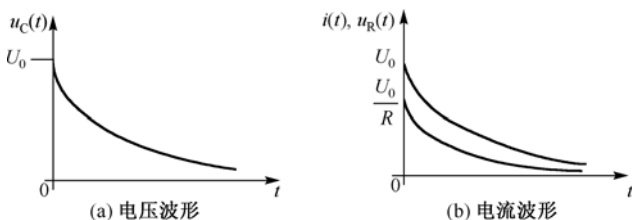


图 3.10 RC 零输入电路的电压、电流波形

与电容电压所不同的是， $i(t)$ 和 $u_R(t)$ 在 $t = 0$ 时发生了跳变，其波形如图 3.10(b) 所示，计算过程如下。电路中电阻的电压为

$$u_R(t) = u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (t > 0)$$

电路电流 i 可由电阻的伏安特性求得

$$i(t) = \frac{u_R}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (t > 0)$$

可见, 换路后电路中的电压、电流均按照相同的指数规律变化。

式(3.10)中, 令 $\tau = RC$, τ 称为 RC 电路的时间常数, 具有时间的量纲。当 R 单位为欧, C 单位为法时, 欧·法 = $\frac{\text{伏} \cdot \text{安秒}}{\text{安} \cdot \text{伏}} = \text{秒}$, τ 的单位为秒。于是, 式(3.10)可推广写为

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (3.11)$$

式(3.11)为 RC 电路零输入响应时电容电压 u_C 变化规律的通式。

显然, 时间常数 τ 是表征动态电路过渡过程进行快慢的物理量。 τ 越大, 过渡过程进行得越慢。由表达式 $\tau = RC$ 可以看出, τ 仅由电路的参数 R 和 C 来决定。当 C 一定时, R 越大, 电路中放电电流越小, 放电时间就越长; 当 R 一定时, C 越大, 电容储存的电场能量越大, 放电时间也就越长。

现以电容电压 u_C 为例, 来说明时间常数 τ 的物理意义, 如表 3.1 所示。

表 3.1 u_C 随时间衰减的情况

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	∞
$u_C(t)$	U_0	$0.368 U_0$	$0.135 U_0$	$0.050 U_0$	$0.018 U_0$	$0.007 U_0$	0

从表中可以看出:

(1) 当 $t = \tau$ 时, $u_C = 0.368 U_0$ 。也就是说, 时间常数 τ 是电容电压 u_C 衰减到初始值的 0.368 倍时所需要的时间。

(2) 从理论上讲, 当 $t = \infty$ 时, u_C 才衰减到 0, 过渡过程才结束。但当 $t = 3\tau \sim 5\tau$ 时, u_C 已衰减到初始值的 0.05 以下。因此, 在工程中一般认为从换路开始经过 $3\tau \sim 5\tau$ 的时间, 过渡过程便基本结束了。

2. RL 电路的零输入响应

对于 RL 电路, 其过渡过程分析与 RC 电路类似。

已知电路如图 3.11, 换路前, 开关 S 在位置 1, 电路处于稳态, 此时电感电流表示为 $i_L(0_-) = I_0$ 。当 $t = 0$ 时, 开关 S 由位置 1 倒向位置 2。根据换路定则, 有 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$ 。电感电流在换路后的回路中流动, 由于电阻 R 是耗能元件, 电感电流将逐渐减小。最后, 电感中储存的能量被电阻耗尽, 电路中的电流、电压也趋向于零。由此放电完毕, 电路进入一个新的稳态。

下面做定量的数学分析。

对换路后的电路, 由约束关系和初始值可得

$$u_L + u_R = 0 \quad (t > 0)$$

$$u_R = Ri_L$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_L(0_+) = I_0$$

可得一阶常系数线性微分方程为

$$\begin{cases} \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = 0 & t > 0 \\ i_L(0_+) = I_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

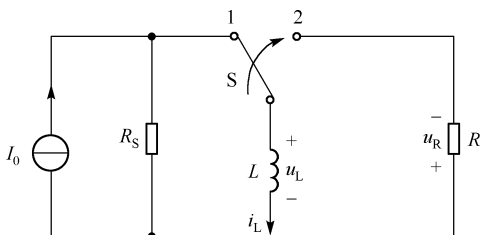


图 3.11 RL 零输入电路

方程解的形式为

$$i_L(t) = Ae^{St} \quad t > 0$$

其中 S 为特征方程 $\frac{L}{R}S + 1 = 0$ ，因此得

$$S = S_1 = -\frac{R}{L}$$

待定常数 A 由初始条件确定，有

$$i_L(0_+) = Ae^{-\frac{R}{L}t} \Big|_{t=0^+} = I_0$$

得

$$A = I_0$$

所以电感电流的零输入响应为

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$

由于电感电流在换路瞬间连续，表达式的时间定义可延续至原点，即

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t \geq 0) \quad (3.13)$$

从该式可以看出，换路后，电感电流从初始值 I_0 开始，按照指数规律递减，直到最终 $i_L \rightarrow 0$ ，电路达到新的稳态，其波形如图 3.12(a) 所示。

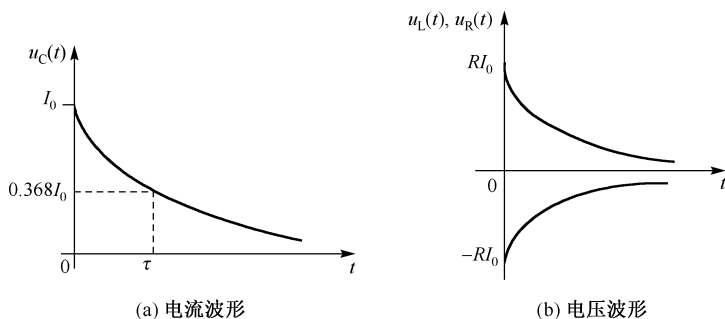


图 3.12 RL 零输入电路的电压、电流波形

与电感电流不同的是， $u_L(t)$ 和 $u_R(t)$ 在 $t=0$ 处发生突变，其波形如图 3.12(b) 所示，计算过程如下。电路中电感电压为

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$

电阻电压为

$$u_R(t) = Ri_L = RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$

与 RC 零输入电路类似，RL 零输入电路各变量具有相同的变化规律，都是以初始值为起点，按指数规律 $e^{-\frac{R}{L}t}$ 衰减到零。令 RL 电路的时间常数为 $\tau = \frac{L}{R} = GL$ ，当 R 单位为欧， L 单位为亨时， τ 的单位为秒。于是，式 (3.13) 可推广写为

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (3.14)$$

式(3.14)为 RL 电路零输入响应时电感电流 i_L 变化规律的通式。

显然, RL 零输入响应的衰减快慢也可用 τ 来衡量。 τ 越大, 衰减越慢, 过渡过程进行得越长。当 L 一定时, R 越小, 消耗能量越小, 电流下降慢; 反之, 则衰减得越快。

3.2.2 一阶电路的零状态响应

所谓零状态, 是指电路的初始状态为零, 即电路中储能元件的初始能量为零。换句话说, 就是电容元件在换路的瞬间电压 $u_C(0) = 0$, 或电感元件在换路的瞬间电流 $i_L(0) = 0$, 在此条件下, 电路在外激励的作用下产生的响应称为零状态响应。零状态响应也可称为零初始状态响应。

1. RC 电路的零状态响应

RC 电路的零状态响应实际上就是它的充电过程。已知电路如图3.13所示, 当 $t < 0$ 时, 开关 S 在位置 2, 电路已经处于稳态, 即电容电压 $u_C(0_-) = 0$, 电容元件的两极板上没有电荷, 电容没有储存电能。当 $t = 0$ 时, 开关 S 由位置 2 倒向位置 1。根据换路定则, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 可见在 $t = 0_+$ 时刻电容相当于短路, 由 $t = 0_+$ 时刻的等效电路可以看出, 电源电压 U_S 全部施加于电阻 R 两端, 此时的电流达到最大值 $i(0_+) = \frac{U_S}{R}$ 。随着电源流经电阻 R 对电容充电, 充电电流逐渐减小, 直至 $u_C = U_S$ 时, 充电过程结束, 此时电流 $i = 0$, 电容相当于开路, 电路进入新的稳态。

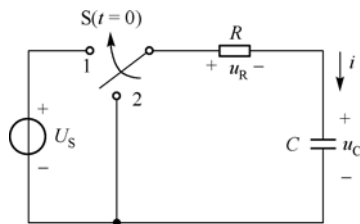


图 3.13 RC 零状态响应

下面做定量的数学分析。

对于图 3.13 换路后的电路, 由 KVL 定律和电路元件的伏安特性可得

$$u_R + u_C = U_S \quad (t > 0)$$

$$u_R = Ri$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

以上三式联立, 可得一阶常系数线性非齐次微分方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (t > 0) \quad (3.15)$$

且 $u_C(0_+) = 0$

由高等数学知识可知, 该微分方程的完全解由齐次方程的通解 u_C'' 和非齐次方程的特解 u_C' 构成, 可以表示为

$$u_C = u_C' + u_C'' \quad (3.16)$$

原方程所对应的齐次方程为

$$RC \frac{du_C''}{dt} + u_C'' = 0$$

在前面分析零输入响应时已知, 此方程的通解为

$$u_C'' = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.17)$$

特解是满足原方程的任意一个解, 由于方程是对换路后的电路列出的, 所以方程可以描述电路换路以后的所有状态。为了简便起见, 可以把电路达到新的稳态后的状态作为特解。则对于 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $u_C \rightarrow U_S$, 即

$$u'_C = U_S \quad (3.18)$$

由式(3.16)、式(3.17)和式(3.18)得式(3.15)的通解为

$$u_C = u'_C + u''_C = U_S + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.19)$$

为确定积分常数 A , 把初始条件 $u_C(0_+) = 0$ 代入式(3.19), 可得

$$A = -U_S$$

最后可得式(3.15)的解为

$$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0 \quad (3.20)$$

式中 $\tau = RC$ 称为 RC 电路的时间常数, 反映电容充电的快慢, 也就是说反映电路过渡过程的长短。时间常数 $\tau = RC$ 越大, 充电时间越长。零状态响应下, 电路电压和电流随时间 t 变化的曲线如图3.14所示。 u_C 的初始值为零, 按指数规律上升, 当 $t = \infty$ 时 u_C 的稳态值是电源电压 U_S ; 电流 i 和电阻电压 u_R 的初始值分别为 U_S / R 和 U_S , 均按指数规律衰减到零。

2. RL 电路的零状态响应

已知电路如图3.15所示, $t < 0$ 时, 开关 S 闭合, 电路已经稳定, 即电感的初始状态 $i_L(0_-) = 0$ 。当 $t = 0$ 时, 开关 S 打开, 根据换路定则, 有 $i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0$ 。

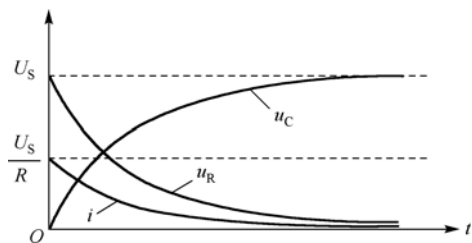


图 3.14 电压和电流的波形

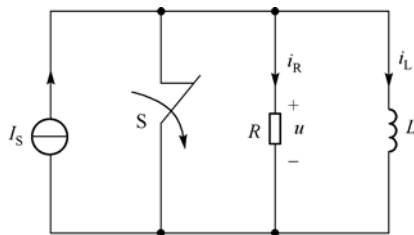


图 3.15 RL 零状态电路

对于图 3.15 换路后的电路, 根据 KCL 定律和元件的约束关系可得

$$i_R + i_S = I_S \quad (t > 0)$$

$$i_R = \frac{u}{R}$$

$$u = L \frac{di_L}{dt}$$

由此得到一阶常系数线性非齐次微分方程为

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_S \quad (t > 0) \quad (3.21)$$

且

$$i_L(0_+) = 0$$

类似 RC 电路零状态响应的求解过程, 可知方程的解由两部分组成, 即

$$i = i' + i'' \quad (3.22)$$

式(3.21)所对应的齐次方程为

$$\frac{L}{R} \frac{di_L''}{dt} + i_L'' = 0$$

此方程的通解为

$$i_L'' = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0) \quad (3.23)$$

同时, 把电路达到新的稳态后的状态作为特解。则对于 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $i_L \rightarrow I_S$, 即

$$i_L' = I_S \quad (3.24)$$

由式(3.22)、式(3.23)和式(3.24)得式(3.21)的通解

$$i = i' + i'' = I_S + Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.25)$$

为确定积分常数 A , 把初始条件 $i_L(0_+) = 0$ 代入式(3.25), 可得

$$A = -I_S$$

最后可得式(3.21)的解为

$$i_L(t) = I_S - I_S e^{-\frac{R}{L}t} = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad t \geq 0 \quad (3.26)$$

令 $\tau = L/R$ 为电路的时间常数, 则

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = RI_S e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$

RL 零状态响应的电压和电流波形如图3.16所示。

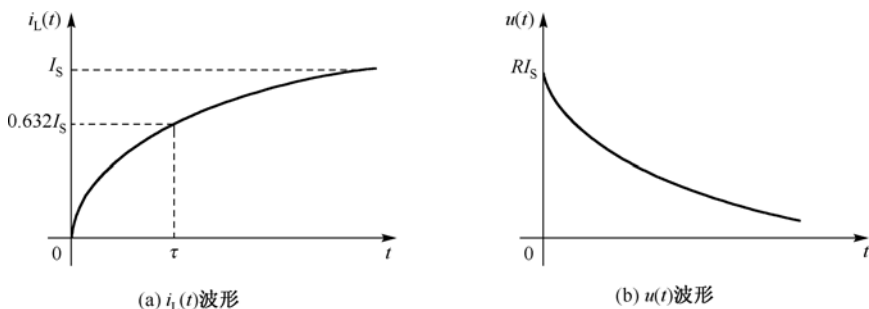


图 3.16 RL 零状态电路 $i_L(t)$ 和 $u(t)$ 的波形

3.3 一阶电路的全响应

3.3.1 一阶电路的全响应

前面讨论了一阶电路在两种特殊情况下的响应, 即零输入响应和零状态响应。当电路的初始状态不为零, 而且外加激励也不为零时, 电路的响应称为电路的全响应。

如图3.17所示, 当 $t < 0$ 时, 开关 S 在位置“1”已久, 电容电压 $u_C(0_-) = U_0 \neq 0$ 。在 $t = 0$ 时, 开关 S 倒向位置“2”, 换路后的电路中仍有电源 U_S 作为整个电路的外加激励, 所以 $t \geq 0$ 时电路发生的过渡过程是全响应。

根据基尔霍夫电压定律和伏安特性, 换路后的电路方程为

$$u_R + u_C = U_S$$

$$u_R = Ri$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

联立三个方程求解, 可得电路全响应的微分方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (t > 0) \quad (3.27)$$

方程(3.27)的解由两部分构成

$$u_C = u'_C + u''_C \quad (3.28)$$

式中, u'_C 是式(3.27)的特解, 这里仍选用电路的稳态解为特解, 即 $u'_C = U_S$; u''_C 是原方程所对应齐次方程的通解。由零状态响应的分析可知

$$u''_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.29)$$

则有

$$u_C = U_S + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.30)$$

式子中常数 A 由初始条件确定, 将

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_0$$

代入式(3.30)可得

$$A = U_0 - U_S$$

式(3.27)表示的方程的解为

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.31)$$

或

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.32)$$

暂态过程中电容电压随时间的变化曲线如图 3.18 所示。

式(3.31)中第一项(即特解)与外加激励具有相同的函数形式, 称为强制响应。第二项的函数形式由特征根确定, 与激励的函数形式无关(它的系数与激励有关), 称为固有响应或自然响应。因此, 按电路的响应形式, 全响应可分解为固有响应和强制响应。第一项在任何时候都保持稳定, 与输入有关, 当输入为直流时, 则稳态响应为常数, 所以第一项又称为稳态响应, 它是当 t 趋于无穷大, 后一项衰减为 0 时的电路响应。第二项按指数规律衰减, 当 t 趋于无穷大时, 该分量将衰减至 0, 所以又称暂态响应。因此按电路的响应特性, 全响应又可分解为稳态响应和暂态响应。换路后激励恒定且在 $R > 0$ 的情况下, 一阶电路的固有响应就是暂态响应, 强制响应就是稳态响应。

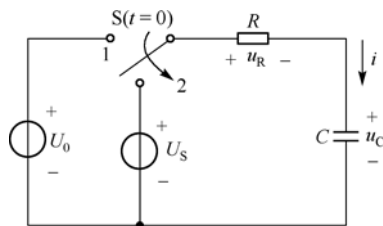


图 3.17 RC 电路的全响应图

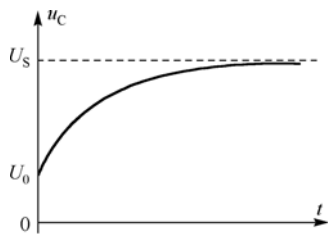


图 3.18 电容电压 u_C 的变化曲线

式(3.32)表示了电路全响应的另外一种形成方法。电路的响应 u_C 由两部分组成,第一项是初始状态为零,由外激励 U_S 产生的零状态响应 $U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$;第二项是外激励 U_S 为零时,由初始状态 U_0 产生的零输入响应 $U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。因此,全响应是零输入响应与零状态响应的和,这也符合线性电路的叠加定理。

3.3.2 三要素法

通过前面对一阶动态电路过渡过程的分析可以看出,换路后电路中的电压、电流都是从一个初始值 $f(0_+)$ 开始,按照指数规律递变到新的稳态 $f(\infty)$,递变的快慢取决于电路的时间常数 τ 。 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 称为一阶电路的三要素,依次可以求出换路后的电路中任一电压、电流的解析式 $f(t)$ 。

从3.2节的分析可知,描述一阶线性电路的电路方程是一阶线性微分方程,它的解由两部分构成:

$$f(t) = f'(t) + f''(t)$$

式中, $f(t)$ 是一阶线性微分方程的解; $f'(t)$ 是原方程的一个特解,一般选用稳态解来作为特解,即

$f'(t) = f(\infty)$; $f''(t)$ 是对应齐次方程的通解,即 $f''(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ 。所以

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.33)$$

为了确定积分常数 A ,把初始条件代入式(3.33)

$$f(0_+) = f(\infty) + A$$

解得

$$A = f(0_+) - f(\infty)$$

所以一阶电路全响应的一般表达式为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.34)$$

由式(3.34)可见,要求解一阶线性电路的响应,只需求出稳态值 $f(\infty)$ 、初始值 $f(0_+)$ 和电路的时间常数 τ ,就可以根据式(3.34)直接写出响应函数 $f(t)$,避免了列电路方程、解微分方程等运算。求出三要素,并直接由式(3.34)求解电路响应的方法称为三要素法。

利用三要素法求解一阶电路的暂态问题,关键是求得三个要素 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 。求解步骤如下:

(1) 求初始值 $f(0_+)$ 。在换路前的电路中求出 $u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_-)$,由换路定则有 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$,得到 $u_C(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ 。将电容元件用电压为 $u_C(0_+)$ 的直流电压源替代,电感元件用电流为 $i_L(0_+)$ 的直流电流源替代,得出 $t = 0_+$ 时刻的等效电路,用电路分析方法求出所需的初始值 $f(0_+)$ 。

(2) 求稳态值 $f(\infty)$ 。电路在 $t \rightarrow \infty$ 时达到新稳态,此时将电容元件视为开路,将电感元件视为短路,这样可以做出稳态电路,求出 $f(\infty)$ 。

(3) 求电路的时间常数 τ 。一阶RC电路的时间常数 $\tau = RC$,一阶RL电路的时间常数 $\tau = L/R$ 。而对于一般一阶电路来说,将换路后电路中的动态元件(电容或电感)从电路中取出,求出剩余电路的戴维宁(或诺顿)等效电路的电阻 R_0 。也就是说, R_0 等于电路中独立源置零时从动态元件两端看进去的等效电阻。

(4) 将初始值 $f(0_+)$ 、稳态值 $f(\infty)$ 和时间常数 τ 代入三要素公式 $f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$,写出一阶电路的全响应。

例3.3 已知电路如图3.19所示, $t = 0$ 时开关S由1倒向2,开关换路前电路已经稳定。试求 $t > 0$

时的响应 $u_C(t)$ 。

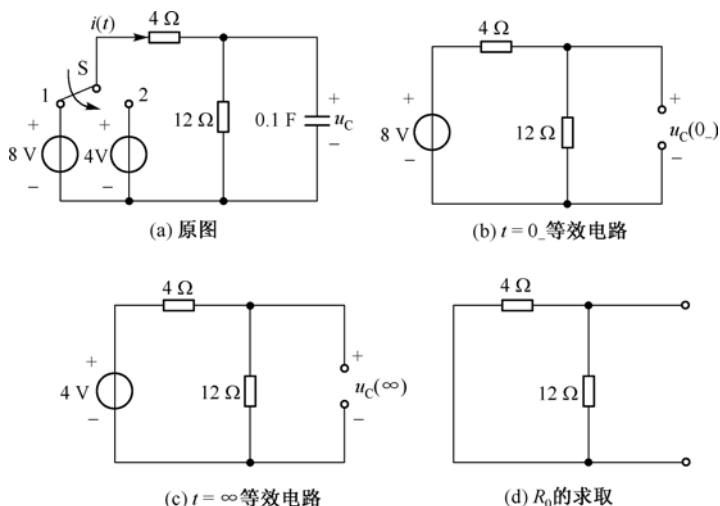


图 3.19 例 3.3 图

解: (1) 求取 $u_C(0_+)$ 。首先求取 $u_C(0_-)$ ，已知开关 S 换路前电路已经稳定，则电容相当于开路，得到 $t=0_-$ 等效电路，如图 3.19(b) 所示，有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 8 \times \frac{12}{12+4} = 6 \text{ V}$$

(2) 求取 $u_C(\infty)$ 。 $t \rightarrow \infty$ 时，电路达到新的稳定，此时电容相当于开路，得到 $t \rightarrow \infty$ 等效电路如图 3.19(c) 所示，有

$$u_C(\infty) = 4 \times \frac{12}{12+4} = 3 \text{ V}$$

(3) 求取 τ 。动态元件所接电阻电路如图 3.19(d) 所示，有

$$R_0 = 4 // 12 = 3 \Omega$$

$$\tau = R_0 C = 3 \times 0.1 = 0.3 \text{ s}$$

(4) 将三要素代入式(3.34)，得

$$u_C(t) = 3 + (6-3)e^{-\frac{10}{3}t} = 3 + 3e^{-\frac{10}{3}t} \text{ V} \quad t \geq 0$$

例 3.4 已知电路如图 3.20 所示，开关 S 在 $t=0$ 时闭合，S 闭合前电路处于稳定状态。试求 $t>0$ 时的 $i_L(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

解: (1) 求取 $i_L(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。首先求取 $i_L(0_-)$ ，已知开关 S 换路前电路已经稳定，则电感相当于短路，得到 $t=0_-$ 等效电路，如图 3.20(b) 所示，有

$$i_L(0_-) = \frac{36}{8+6+6} = 1.8 \text{ A}$$

根据换路定则有 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1.8 \text{ A}$ 。作 $t=0_+$ 时刻的等效电路，如图 3.20(c) 所示，此时电感被一个电流为 1.8 A 的直流电流源替代，由此可得响应的初始值：

$$u_L(0_+) = 36 - (6+6)i_L(0_+) = 36 - 12 \times 1.8 = 14.4 \text{ V}$$

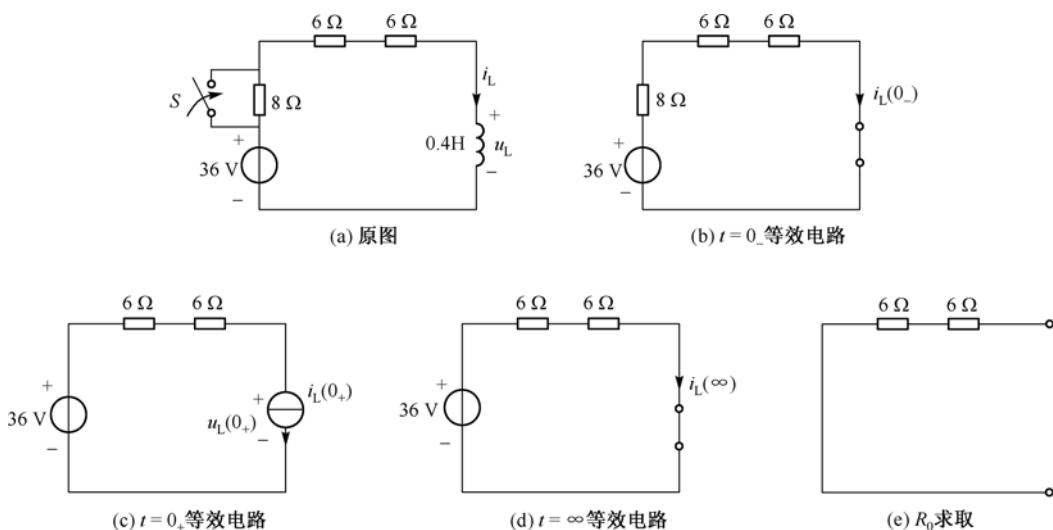


图 3.20 例 3.4 图

(2) 求取 $i_L(\infty)$ 和 $u_L(\infty)$ 。 $t \rightarrow \infty$ 时, 电路达到新的稳定, 此时电感相当于短路, 得到 $t \rightarrow \infty$ 等效电路如图 3.20(d) 所示, 有

$$i_L(\infty) = \frac{36}{6+6} = 3 \text{ A}$$

$$u_L(\infty) = 0$$

(3) 求取 τ 。如图 3.20(e) 所示, 由此可得时间常数

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.4}{6+6} = \frac{1}{30} \text{ s}$$

(4) 将三要素代入式(3.34), 得

$$i_L(t) = 3 + (1.8 - 3)e^{-30t} = 3 - 1.2e^{-30t} \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = 0 + (1.44 - 0)e^{-30t} = 1.44e^{-30t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

3.4 一阶电路的阶跃响应

3.4.1 单位阶跃信号

在动态电路中, 常采用阶跃信号来描述电路的激励和响应。单位阶跃信号的定义是:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

其波形如图 3.21(a)所示, 在跃变点 $t=0$ 处, 函数值未定义。

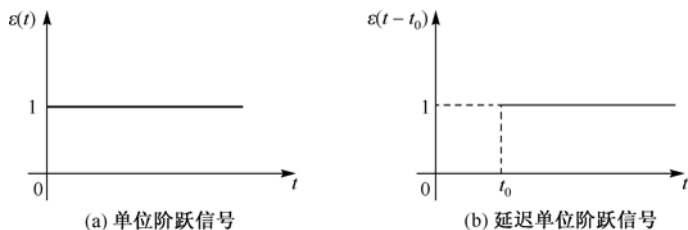


图 3.21 阶跃信号

若单位阶跃信号跃变点在 $t = t_0$ 处, 则称其为延迟单位阶跃信号, 可表示为:

$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

其波形图如图 3.21 (b) 所示。

单位阶跃信号的物理意义是: 当用 $\varepsilon(t)$ 作为电路的电源时, 相当于该电路在 $t = 0$ 时刻接入单位直流源, 且不再变化, 其示意图如图 3.22 所示。

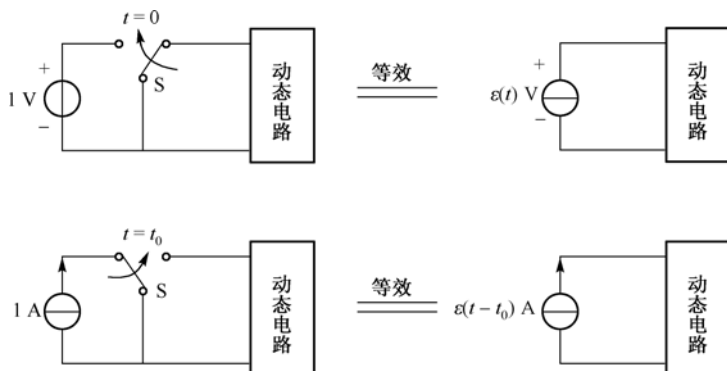


图 3.22 用阶跃信号表示开关换路

利用单位阶跃信号和延时阶跃信号, 可以将一些阶梯状波形表示为若干阶跃函数的叠加。

如图 3.23 中矩形脉冲信号, 可以看成是图 3.23 (b)、(c) 所示两个阶跃信号的叠加:

$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t - t_0)$$

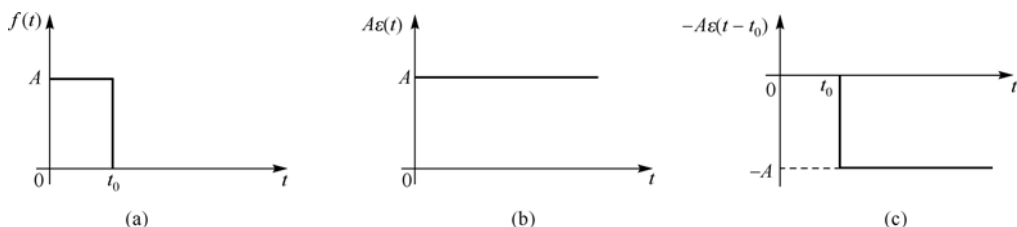


图 3.23 矩形脉冲信号的分解

另外, 以 $\varepsilon(t - t_0)$ 乘以某一对所有 t 都有定义的函数, 得到的是一个在 $t < t_0$ 时为零, 而在 $t > t_0$ 等于 $f(t)$ 的函数, 其表达式为 $f(t)\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ f(t) & t > t_0 \end{cases}$, 波形如图 3.24 所示。

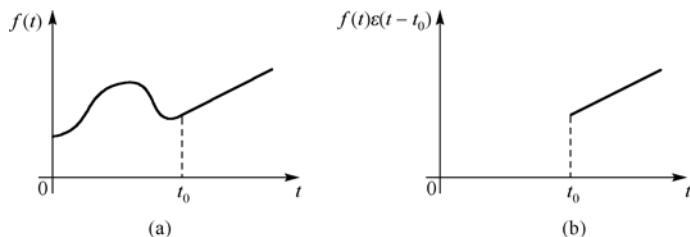


图 3.24 函数 $f(t)$ 与单位阶跃函数相乘的结果示意图

3.4.2 阶跃响应

电路对于阶跃激励的零状态响应称为电路的阶跃响应。当激励为单位阶跃函数时电路的响应称为单位阶跃响应，用 $s(t)$ 表示。单位阶跃响应可按直流一阶电路分析，即用三要素法进行分析。

例 3.5 求图 3.25 (a) 所示电路在图 3.25 (b) 所示脉冲电流作用下的零状态响应 $i_L(t)$ 。

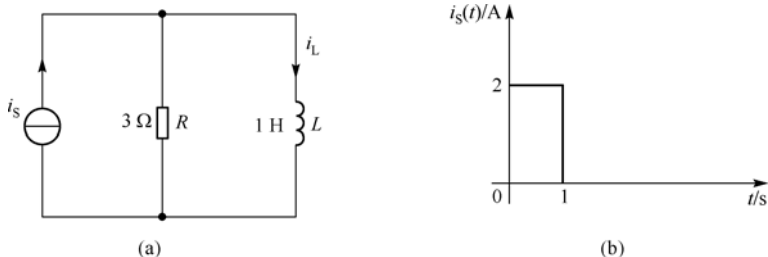


图 3.25 例 3.5 图

解：该电路对应的阶跃响应 $s(t)$ ，得

$$s(t) = (1 - e^{-3t})\varepsilon(t)$$

将脉冲电流 $i_s(t)$ 看做两个阶跃电流之和，即

$$i_s(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)$$

由电路的零状态线性，可得 $2\varepsilon(t)$ 作用下的零状态响应为 $2s(t)$ ； $-2\varepsilon(t)$ 作用下的零状态响应为 $-2s(t)$ ，可得 $-2\varepsilon(t-1)$ 作用下的零状态响应 $-2s(t-1)$ 。根据叠加原理，可得 $i_s(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)$ 作用下的零状态响应为 $2s(t) - 2s(t-1)$ ，即

$$i_L(t) = 2(1 - e^{-3t})\varepsilon(t) - 2(1 - e^{-3(t-1)})\varepsilon(t-1)$$

本例中，首先将图 3.25 (b) 所示的分段常量信号分解为阶跃信号，根据叠加原理，将各阶跃信号分量单独作用于电路的零状态响应相加得到该分段常量信号作用下电路的零状态响应。如果电路的初始状态不为零，则需再叠加上电路的零输入响应，就得到该电路在分段常量信号作用下的全响应。

例 3.6 电路如图 3.26 (a) 所示， $u_s(t)$ 波形如图 3.26 (b) 所示，已知 $u_C(0_-) = 4 \text{ V}$ 。求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

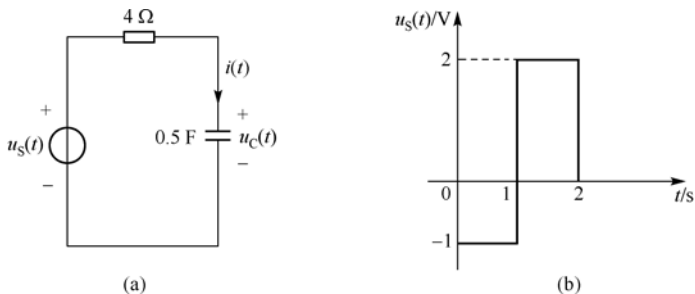


图 3.26 例 3.6 图

解：由于外加激励是分段常量信号，因此可以通过阶跃响应求零状态响应，零输入响应单独求取，叠加后得到全响应。

(1) 求取零输入响应 $i_{zi}(t)$ 。令 $u_s(t) = 0$ ，且 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4 \text{ V}$ ，可得

$$i(0_+) = -1 \text{ A}, \quad i(\infty) = 0, \quad \tau = 2 \text{ s}$$

由三要素公式得

$$i_{Zi}(t) = -e^{-\frac{1}{2}t} \quad (t > 0)$$

(2) 求取零状态响应 $i_{Zs}(t)$ 。令 $u_s(t) = \varepsilon(t)$, $u_C(0_-) = 0$, 由三要素法可求得

$$s(t) = 0.5e^{-\frac{1}{2}t} \varepsilon(t)$$

由

$$u_s(t) = -\varepsilon(t) + 3\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2)$$

得

$$\begin{aligned} i_{Zs}(t) &= -s(t) + 3s(t-1) - 2s(t-2) \\ &= -0.5e^{-\frac{1}{2}t} \varepsilon(t) + 1.5e^{-\frac{1}{2}(t-1)} \varepsilon(t-1) - e^{-\frac{1}{2}(t-2)} \varepsilon(t-2) \end{aligned}$$

(3) 叠加求全响应。

$$\begin{aligned} i(t) &= i_{Zi}(t) + i_{Zs}(t) \\ &= -e^{-\frac{1}{2}t} - 0.5e^{-\frac{1}{2}t} \varepsilon(t) + 1.5e^{-\frac{1}{2}(t-1)} \varepsilon(t-1) - e^{-\frac{1}{2}(t-2)} \varepsilon(t-2) \quad (t > 0) \end{aligned}$$

3.5 一阶电路的冲激响应

3.5.1 单位冲激信号的定义

单位冲激信号 $\delta(t)$ 的工程定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & (t=0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

式(3.37)表明: $\delta(t)$ 仅仅存在于 $t=0$ 的瞬间, 幅度为无限大, 在图像上用一个箭头表示; 同时 $\delta(t)$ 除在原点以外, 处处为零, 且 $(-\infty, \infty)$ 时间内的积分值为 1, 即函数 $\delta(t)$ 与横轴 t 围成的面积为 1。其波形通常用一个带箭头的单位长度线表示, 旁边括号内的“1”表示其强度, 如图3.27(a)所示。

直观地看, 这一函数可以设想为一列窄脉冲的极限。比如一个矩形脉冲, 宽度为 Δ , 高度为 $1/\Delta$, 在 $\Delta \rightarrow 0$ 的极限情况下, 它的高度无限增大, 但面积始终保持为 1, 如图3.27(b)所示。当冲激出现在任一点 $t=t_0$, 波形如图3.27(c)所示。

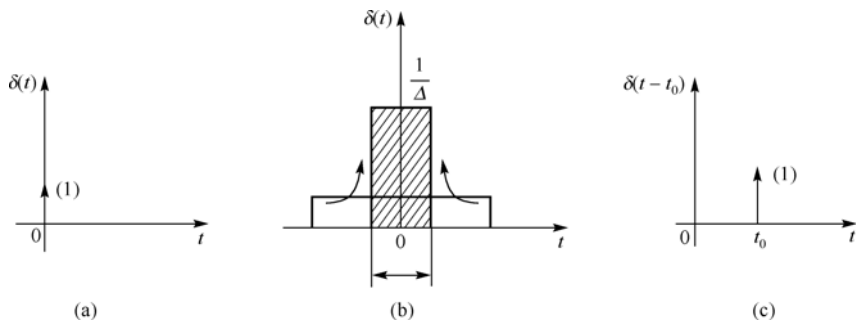


图 3.27 冲激信号

冲激函数具有如下性质:

(1) 加权特性。

由于 $t \neq t_0$ 时有 $\delta(t-t_0)=0$ ，因此对于一个在 $t=t_0$ 处连续的普通函数 $f(t)$ ，当 $f(t)$ 与 $\delta(t-t_0)$ 相乘时，只有在 $t=t_0$ 处不为零，即

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \quad (3.38)$$

当 $t_0=0$ 时，则有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \quad (3.39)$$

上式说明，一个普通函数与单位冲激函数相乘时，结果仍为一个冲激函数，该冲激函数出现的时刻与原冲激函数出现的时刻相同，只是其强度为冲激函数出现时刻该项普通函数的值。

(2) 筛选特性(又称采样性)。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (3.40)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \quad (3.41)$$

可见，单位冲激函数通过与普通函数相乘、积分运算，可将函数 $f(t)$ 在冲激出现时刻的函数值筛选出来，这就是冲激函数的筛选特性。

(3) 冲激函数与阶跃函数之间的关系。它们两者之间有以下关系：

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (3.42)$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau \quad (3.43)$$

同理，有

$$\delta(t-t_0) = \frac{d\varepsilon(t-t_0)}{dt} \quad (3.44)$$

3.5.2 冲激响应

电路的单位冲激响应是指零状态电路在单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用下的响应，简称冲激响应，用 $h(t)$ 表示。它反映了电路的特性，同时也是利用卷积积分进行时域分析的重要基础。

1. 直接法

对于简单电路而言，直接计算该电路在单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用下的零状态响应，即可算出冲激响应 $h(t)$ 。

例 3.7 RC 并联电路如图 3.28(a) 所示，已知电流源 $i_s(t)=\delta(t)$ ，试求电容电压的冲激响应 $h(t)$ 。

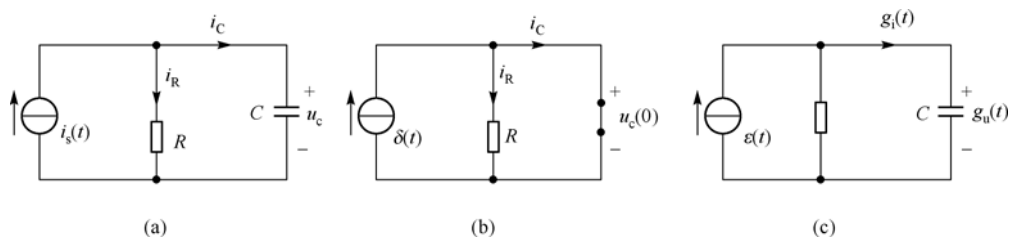


图 3.28 例 3.7 图

解：图 3.28(a) 中，由 KCL 有

$$C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} = \delta(t)$$

由于 $\delta(t)$ 只有在 $t=0_- \sim 0_+$ 期间存在，其余时间均为零值，故有

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = 0 \quad (t > 0)$$

在 $t > 0$ 后，由于在 $\delta(t)$ 作用下，此时的电路是一个零输入响应，具有齐次通解形式。因此，需要进一步计算出 $u_C(0_+)$ 。

由于在 $t < 0$ 时，有 $u_C(0_-) = 0$ ，即电路处于零状态，在换路瞬间 $t=0$ 时电容相当于短路，如图 3.28(b) 所示。可以看出 $i_C(0) = \delta(t)$ 。

因而在 $t=0_+$ 时电容电压 $u_C(0_+)$ 可表示为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(t) dt = \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{C}$$

当 $t > 0$ 时， $\delta(t) = 0$ ，电流源相当于开路，此时的电路仅为 RC 构成的放电电路，所以有

$$h(t) = u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

需要注意的是，在前面章节中介绍换路定则时，指出在电容电流为有限值的情况下，电容电压不能跃变，有 $u_C(0_-) = u_C(0_+)$ 。但此时， $t=0$ 时电容电流为无穷大的冲激电流，从而使电容电压发生了跃变而不连续了，则有 $u_C(0_-) \neq u_C(0_+)$ 。

同理，当电感电压为有限值时，电感电流不能跃变，即 $i_L(0_-) = i_L(0_+)$ ；一旦电感电压为 $\delta(t)$ 时，电感电流则发生跃变而不连续，则有 $i_L(0_-) \neq i_L(0_+)$ 。

然而对于一个复杂的一阶电路，运用直接法求 $h(t)$ 会比较繁琐。因此，可以选用间接法确定一阶电路的冲激响应。

2. 间接法

间接法是先计算电路的阶跃响应 $s(t)$ ，然后利用冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $s(t)$ 的关系计算冲激响应。

间接法是基于冲激信号与阶跃信号之间的关系式

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

对于线性不变电路而言，有

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (3.45)$$

式(3.45)中， $s(t)$ 为单位阶跃响应。冲激响应是阶跃响应的导函数。而阶跃响应是在阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 作用下的零状态响应，可用三要素法求得。

现以例 3.7 为例运用上式求出电路的冲激响应。

可由三要素公式，求得电路中电容电压的阶跃响应为

$$s(t) = R(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})\varepsilon(t)$$

再利用式(3.45)得该电容电压的冲激响应为

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = R \frac{d}{dt} \left[\varepsilon(t) - e^{-\frac{1}{RC}t} \varepsilon(t) \right] \\
 &= R \left[\delta(t) - e^{-\frac{1}{RC}t} \delta(t) + \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \varepsilon(t) \right] \\
 &= R \left[\delta(t) - \delta(t) + \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \varepsilon(t) \right] \\
 &= \frac{1}{C} e^{-\frac{1}{RC}t} \varepsilon(t)
 \end{aligned}$$

3.6 卷积积分

本节讨论电路在任意信号激励下零状态响应的时域分析方法——卷积分析法。首先将任意波形信号分解为无穷多个连续出现的冲激信号之和，然后借助 3.5 节介绍的冲激响应的概念，根据线性时不变电路的特点，得出求解任意信号 $x(t)$ 激励下的零状态响应的卷积分析法。

3.6.1 信号的时域分解

任意波形的信号 $x(t)$ 可以纵向分割成许多相邻的矩形脉冲，如图 3.29 所示， Δ 是脉冲宽度，对于 $t = n\Delta$ 时刻的矩形脉冲，其高度即 $x(t)$ 的值为 $x(n\Delta)$ 。

为了讨论方便，本节所讨论的门函数 $g_\Delta(t)$ 如图 3.30 所示。

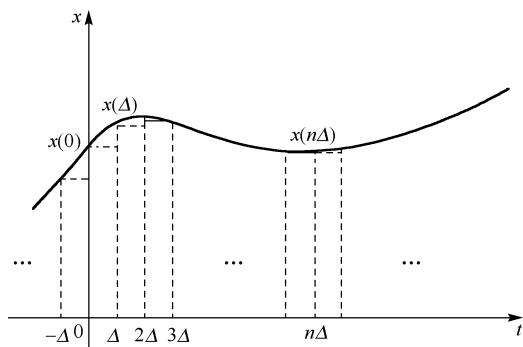


图 3.29 用窄脉冲之和近似表示任意信号

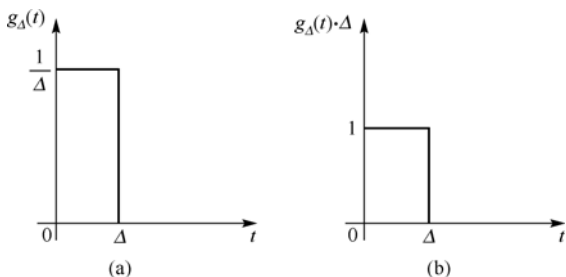


图 3.30 门函数 $g_\Delta(t)$ 的另一种定义

门函数在 $\Delta \rightarrow 0$ 时的极限等于 $\delta(t)$ ，如图 3.30 (b) 所示的高度为 1 的门函数为 $g_\Delta(t)\Delta$ ，因此：

第 0 个矩形脉冲可以表示为： $x(0)g_\Delta(t)\Delta$

第 1 个矩形脉冲可以表示为： $x(\Delta)g_\Delta(t-\Delta)\Delta$

第 n 个矩形脉冲可以表示为： $x(n\Delta)g_\Delta(t-n\Delta)\Delta$

无穷多个矩形脉冲的叠加可用来近似原信号 $x(t)$ ，即

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta)g_\Delta(t-n\Delta)\Delta \quad (3.46)$$

显然，脉冲宽度越窄，这一近似就越好。当 $\Delta \rightarrow 0$ 时，式 (3.46) 可表示为

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum x(n\Delta)\delta(t-n\Delta)\Delta \quad (3.47)$$

当 $\Delta \rightarrow 0$, 即 $\Delta \rightarrow d\tau$, $n\Delta$ 成为新变量 τ , 求和变成对连续新变量 τ 的积分, 即

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (3.48)$$

式(3.48)表明, 任意波形的信号 $x(t)$ 可以表示为强度为 $x(\tau)d\tau$ 、出现时刻为 τ 的无限多个冲激信号的积分, 也就是说, 任意波形的信号可以分解为连续的加权冲激信号之和。

3.6.2 零状态响应——卷积积分

下面研究电路在任意波形信号 $x(t)$ 激励下的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。由式(3.48)可知, 电路在信号 $x(t)$ 激励下的零状态响应就是在信号 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ 激励下的零状态响应。

对于线性时不变电路来说, $\delta(t)$ 激励下的零状态响应为冲激响应 $h(t)$, 记做

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

则

$$\delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

$$x(\tau) d\tau \cdot \delta(t - \tau) \rightarrow x(\tau) d\tau \cdot h(t - \tau)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

即任意波形信号 $x(t)$ 作用于线性时不变电路的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.49)$$

式(3.49)称为 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分, 简称卷积。也就是说, 信号 $x(t)$ 激励下的零状态响应等于输入信号 $x(t)$ 与电路冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分, 记做

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \quad (3.50)$$

式(3.50)表明, 一旦求得电路的冲激响应 $h(t)$, 只要计算任意激励信号 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分, 就可得到由 $x(t)$ 与电路冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分, 就可得到由 $x(t)$ 引起的零状态响应, 这种方法将使零状态响应的计算大大简化, 通常也称其为卷积分析法。

式(3.49)是卷积积分的一种形式, 当 $x(t)$ 与 $h(t)$ 受到某种限制时, 其积分上、下限会有所变化。

对于有始信号 $x(t)$, 即 $t < t_1$ 时, $x(t) = 0$, 式中的 $x(\tau)$ 可表示为 $x(\tau)\varepsilon(\tau - t_1)$, 则积分下限应从 t_1 开始, 式(3.49)应表示为

$$y_{zs}(t) = \int_{t_1}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.51)$$

相反, 若 $x(t)$ 不受此限制, 而 $h(t)$ 有始, 即 $t < t_2$ 时, $h(t) = 0$, 式(3.49)中的 $h(t)$ 可表示为 $h(t - \tau)\varepsilon(t - \tau - t_2)$, 即 $\tau < t - t_2$ 的时间范围才不等于零。因此积分上限应取 $t - t_2$, 式(3.49)应表示为

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{t - t_2} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.52)$$

若 $x(t)$ 与 $h(t)$ 都是有始的, 设 $x(t) = x(t)\varepsilon(t - t_1)$, $h(t) = h(t)\varepsilon(t - t_2)$, 则

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\varepsilon(\tau - t_1)h(t - \tau)\varepsilon(t - \tau - t_2)d\tau$$

由于在 $\tau - t_1 < 0$ 即 $\tau < t_1$ 时, $\varepsilon(\tau - t_1) = 0$, 在 $t - \tau - t_2 < 0$ 即 $\tau > t - t_2$ 时, $\varepsilon(t - \tau - t_2) = 0$, 因而在 $\tau < t_1$ 和 $\tau > t - t_2$ 时, 被积函数为零。故积分限应取为从 t_1 到 $t - t_2$ 。由于积分上限 $t - t_2$ 不小于下限 t_1 ,

即 $t - t_2 \geq t_1$ ，因此 t 的范围为 $t \geq t_1 + t_2$ ，故将卷积结果乘以 $\varepsilon(t - t_1 - t_2)$

$$y_{zs}(t) = \int_{t_1}^{t-t_2} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \cdot \varepsilon(t-t_1-t_2) \quad (3.53)$$

实际电路只能是因果系统，其激励信号一般为有始信号。所谓因果系统，是指响应不能领先于激励的系统，也就是说它在任何时刻的输出响应只取决于现在及过去的输入，而与将来的输入无关。激励是产生响应的原因，响应是激励引起的结果。 $h(t)$ 是单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用于电路的零状态响应， $\delta(t)$ 只在 $t=0$ 时刻出现，由于响应不能领先于激励，因而因果系统的 $h(t)$ 只可能在 $t \geq 0$ 时才会出现， $h(t)$ 一定是有始的。

3.7 Multisim 动态电路分析

Multisim 软件有元器件模型、测量仪器及仿真分析工具，可以方便地用于动态电路的各类分析，本节将给出动态电路分析的应用实例。

例 3.8 如图 3.31 所示一阶电路，开关在 $t=0$ 时刻打开，开关动作前电路已达稳定，用 Multisim 测量 $u_C(t)$ 的零输入响应波形。

解：在 Multisim 工作区中画出该电路，如图 3.32 所示。由图可以求出电感电压的初始值为 0 V。延时开关的参数设置为：TON=0.1 s，TOFF=2 s。打开示波器并选择合适量程后，启动分析开关，可从电压示波器观察分析到的动态过程，如图 3.33 所示。

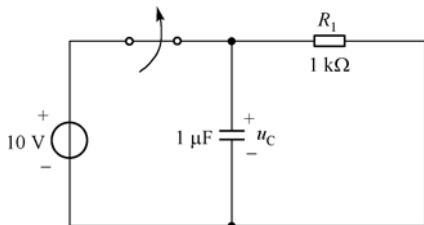


图 3.31 例 3.8 图

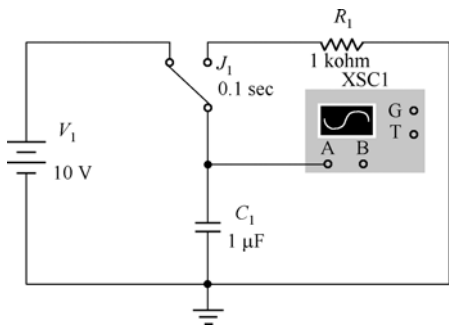


图 3.32 例 3.8 的 Multisim 电路

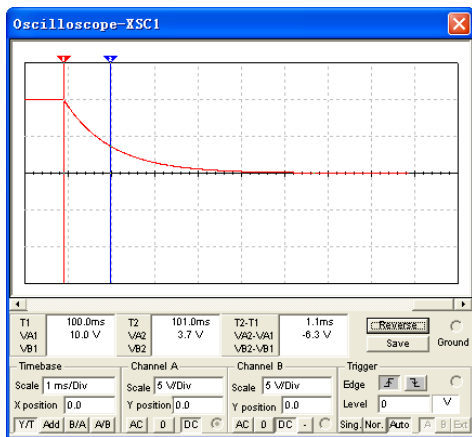


图 3.33 示波器观察的 $u_C(t)$ 波形图

由图 3.33 可以看出，当开关动作前，电源对电容充电，由标尺可以测得，其充电电压达到稳态值 10 V。当开关在 0.1 s 动作时，电容开始放电，不难求出 $\tau = 10^{-6} \text{ F} \times 10^3 \text{ } \Omega = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$ ，因此在 1τ 的标尺位置处，电容电压值约为 3.7 V，即约为初始值的 0.368 倍。

例 3.9 如图 3.34 所示一阶电路。开关在 $t=0$ 时刻动作，开关动作前电路已达稳定，用 Multisim 测量 $u_L(t)$ 的零输入响应波形。

解：在 Multisim 工作区中画出该电路，如图 3.35 所示。由图可以求出电感电压的初始值为 0 V。

延时开关的参数设置为: $\text{TON} = 0.1 \text{ s}$, $\text{TOFF} = 2 \text{ s}$ 。打开示波器并选择合适量程后, 启动分析开关, 可从电压示波器观察分析到的动态过程, 如图 3.36 所示。

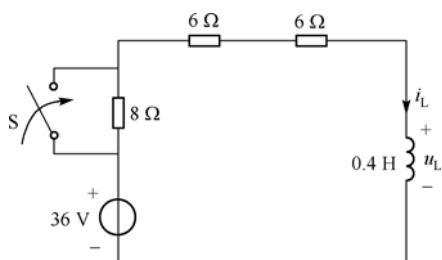


图 3.34 例 3.9 图

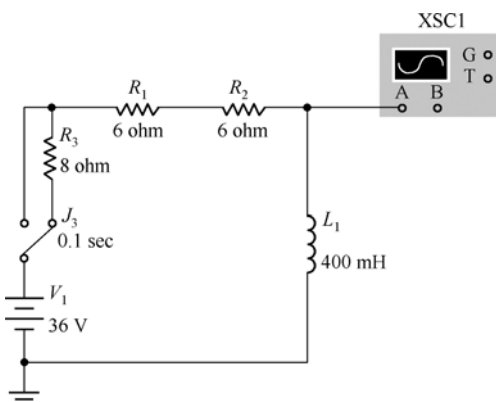


图 3.35 例 3.9 的 Multisim 电路

由图 3.36 可以看出, 当开关动作前, 电路达到稳定状态, 此时电感相当于短路, 则有 $u_L(0_-) = 0 \text{ V}$ 。由图 3.34 的理论分析可得, $u_L(0_+) = 14.4 \text{ V}$, $u_L(\infty) = 0 \text{ V}$, $\tau = \frac{1}{30} \text{ s}$, 因此

全响应为 $u_L(t) = u_L(\infty) + [u_L(0_+) - u_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 14.4e^{-30t}$ 。由标尺可以测得, 当开关在 0.1 s 动作后, 电感电压发生了跃变, 此时 $u_L(0_+) = 14.4 \text{ V}$, 由此开始以指数形式衰减至零, 达到一个新的稳定状态。

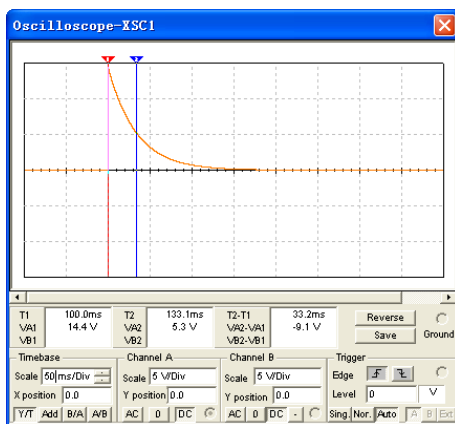


图 3.36 示波器观察的 $u_L(t)$ 波形图

小结

1. 换路定则

在电容电流 i_C 有限或电感电压 u_L 有限的条件下, 如果电路在 $t = 0$ 时换路, 则电容电压 u_C 和电感电流 i_L 不变, 用一般表达式表示为

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

2. 一阶电路的暂态分析

(1) 零输入响应

电容电压 u_C 为

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电感电流 i_L 为

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(2) 零状态响应

电容电压 u_C 为

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

电感电流 i_L 为

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

(3) 全响应

电容电压 u_C 为

$$u_C(t) = u_C(\infty) + (u_C(0_+) - u_C(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电感电流 i_L 为

$$i_L(t) = i_L(\infty) + (i_L(0_+) - i_L(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

全响应是零输入响应与零状态响应的叠加，也可看成稳态响应与暂态响应的叠加。

3. 三要素法

在一阶线性电路中,如果知道某一电流或电压的初始值 $f(0_+)$ 、稳态值 $f(\infty)$ 和电路的时间常数 τ , 就可以根据式

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

直接求出此电流或电压的响应。 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 称为一阶电路分析的三要素, 这种电路暂态分析方法称为三要素法。

4. 一阶电路的阶跃响应

对一阶电路来说, 单位阶跃响应可按直流一阶电路分析, 即用三要素法进行分析。而一些分段常量信号可以分解为阶跃信号, 根据叠加原理, 将各阶跃信号分量单独作用于电路的零状态响应相加得到该分段常量信号作用下电路的零状态响应。如果电路的初始状态不为零, 则需再叠加上电路的零输入响应, 就得到该电路在分段常量信号作用下的全响应。

对一阶电路来说, 其冲激响应来可通过直接计算该电路在单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用下的零状态响应, 即可算出冲激响应 $h(t)$ 。也可采用间接法, 即先计算电路的阶跃响应 $s(t)$, 然后利用冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $s(t)$ 的关系计算冲激响应。

5. 卷积积分

在任意信号激励下零状态响应的时域分析方法为卷积分析法。首先将任意波形信号分解为无穷多个连续出现的冲激信号之和, 然后借助冲激响应的概念, 根据线性时不变电路的特点, 得出求解任意信号激励下的零状态响应的卷积分析法。

习题 3

3.1 试求图 3.37 所示电路开关动作后的电压 (u_L 和 u_C) 和电流 (i_L 和 i_C)。

3.2 电路如图 3.38 所示, 在开关 S 闭合前电路处于稳定状态, 试求 S 闭合后的 $i_C(0_+)$ 及 $u_L(0_+)$ 。

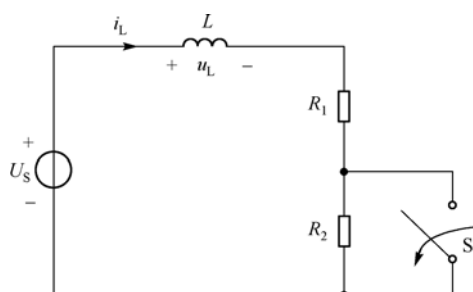


图 3.37

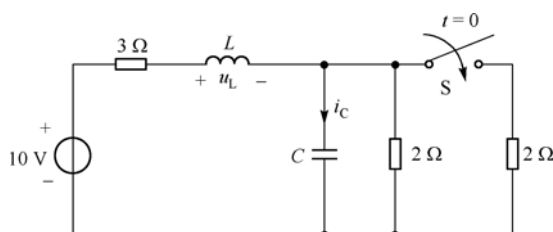


图 3.38

3.3 电路如图 3.39 所示, 在开关 S 打开前闭合电路处于稳定状态, 试求 S 打开后的 $u_C(0_+)$ 、 $u_R(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 及 $i_C(0_+)$ 。

3.4 电路如图 3.40 所示, 在开关 S 闭合前电路已处于稳态, 在 $t=0$ 时开关闭合。求 $i_1(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $i_k(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。

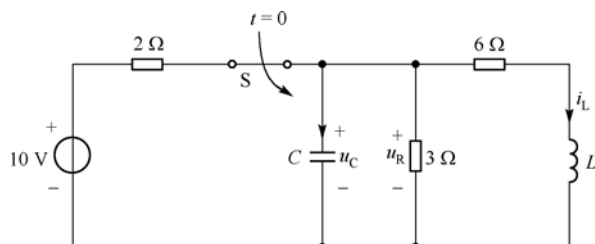


图 3.39

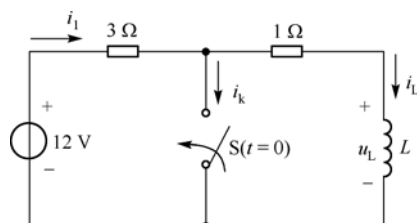


图 3.40

3.5 电路如图 3.41 所示, 在开关 S 闭合前电路已处于稳态, 在 $t=0$ 时开关闭合, 求开关 S 断开瞬间的 $i_C(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 和 $u_C(0_+)$ 。

3.6 电路如图 3.42 所示, 在开关 S 闭合前电路已处于稳态, 在 $t=0$ 时开关闭合, 在 $t=0$ 时将 S 打开, 试求 $t>0$ 时 $i_L(t)$ 和 $u(t)$ 。

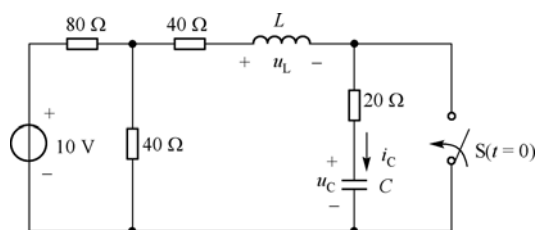


图 3.41

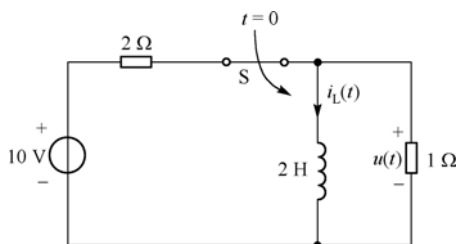


图 3.42

3.7 电路如图 3.43 所示, 在开关 S 未动作前, 电路已处于稳态, 在 $t=0$ 时开关由位置 1 倒向位置 2。试求 $2\ \Omega$ 电阻中的电流 i 。

3.8 电路如图 3.44 所示, 电路原已稳定, $t=0$ 时开关 S 闭合。试求 $t>0$ 时的 $i_L(t)$ 、 $i(t)$ 和 $u_R(t)$ 。

3.9 已知电路如图 3.45 所示, $t=0$ 时开关 S 闭合, 开关动作前电路已稳定, 试求 $t>0$ 时的 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 。

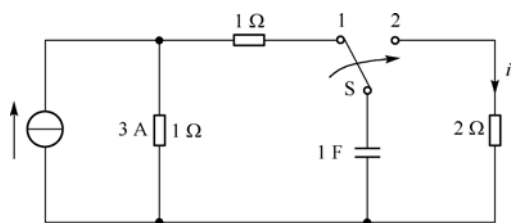


图 3.43

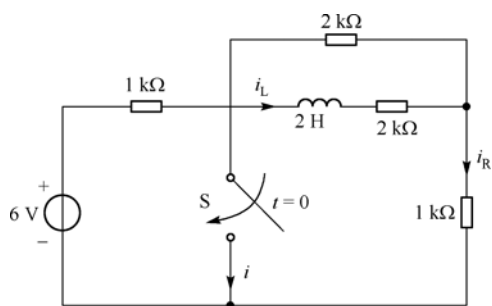


图 3.44

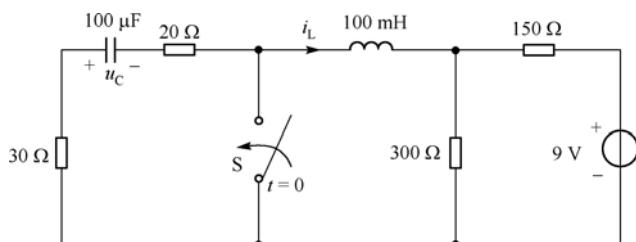


图 3.45

3.10 如图 3.46 所示的电路，已知 $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $C = 3 \text{ }\mu\text{F}$, $U_{S1} = 3 \text{ V}$, $U_{S2} = 5 \text{ V}$ ，开关长期合在位置“1”，在 $t = 0$ 时合到位置“2”。试求 $u_C(t)$ 。

3.11 如图 3.47 所示的电路， $t = 0$ 时开关 S 闭合。求：(1) 开关闭合瞬间和闭合很久后电感两端的电压；(2) 开关闭合后电感电流随时间变化的规律。

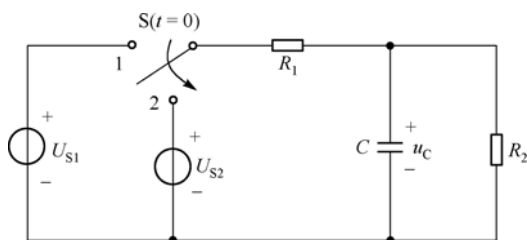


图 3.46

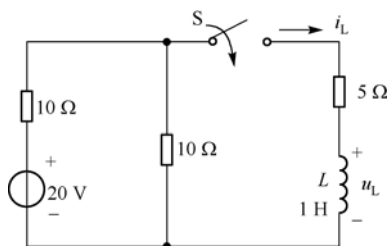


图 3.47

3.12 如图 3.48 所示的电路，开关 S 闭合前电路已处于稳态，求开关闭合后 i_1 、 i_2 随时间变化的规律，画出 i_1 、 i_2 的变化曲线。

3.13 如图 3.49 所示的电路换路前已处于稳态，开关 S 在 $t = 0$ 时闭合，求闭合后的电流 $i(t)$ 。

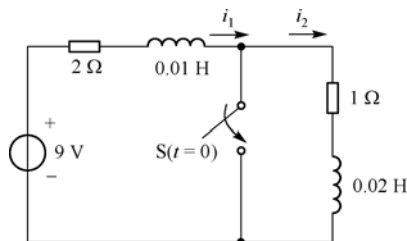


图 3.48

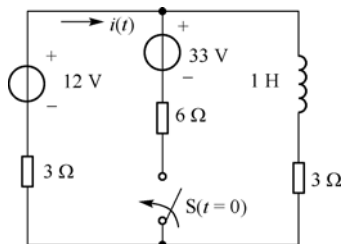


图 3.49

3.14 如图 3.50 所示的电路换路前已处于稳态, 开关 S 在 $t=0$ 时闭合, 求 $t \geq 0$ 时通过开关的电流 $i(t)$ 。

3.15 如图 3.51 所示的电路在换前处于稳态, $t=0$ 时开关 S 打开, 求 $u_s(t)$ 的表达式。

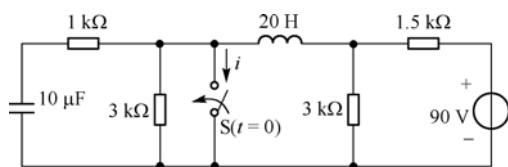


图 3.50

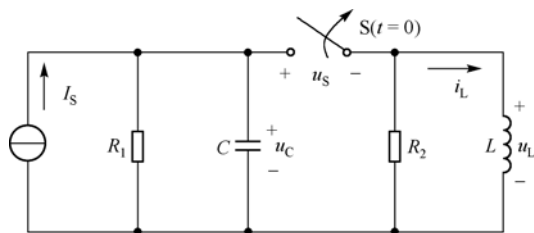


图 3.51

3.16 在图 3.52(a) 电路中, 已知 $i_L(0_-) = 1\text{A}$, 其中 $u_s(t)$ 波形如图 3.52(b) 所示, 试求 $i_L(t)$ 。

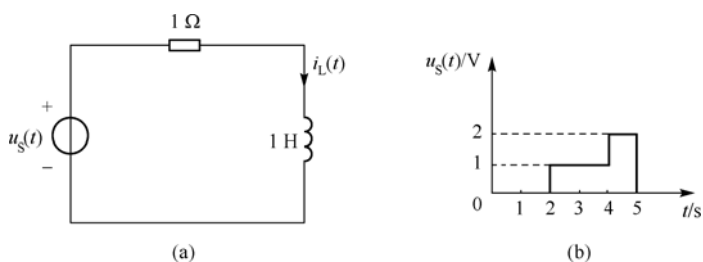


图 3.52

3.17 已知电路如图 3.53 所示, 试求电容电流 i_C 和电阻电流 i 的单位冲激响应。

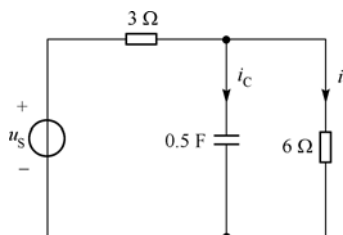


图 3.53

第4章 正弦稳态电路分析

正弦信号是指随时间按正弦规律变化的信号，在正弦信号作用下的电路称为正弦交流电路。在现代工农业生产和日常生活中，广泛应用的交流电都是正弦交流信号，即正弦交流电。与直流电相比，正弦交流电在电能的产生、输送和使用方面具有明显的优势。首先，交流电可以利用变压器方便地改变电压，使发电、输电、配电和用电既经济又安全。其次，交流电动机比相同功率的直流电动机结构简单，成本低廉，使用维护也很方便。即便是需要直流供电的场合，也可利用整流设备将交流电转化为直流电。此外，科学研究和工程技术中所有实际信号(如通信信号、控制信号、语音信号、实时采样信号等)都可以通过相应的数学变换分解成为一系列正弦信号的线性组合，运用线性电路的叠加定理，以及各正弦激励下的响应结论，就可以得到任意实际信号作用下的电路响应。因此，对正弦交流电路进行分析和研究具有重要的理论意义和实际价值。

正弦交流电路经过一段时间达到稳定状态时，电路中各支路电压和电流是与正弦激励信号同频率的正弦量，此时的正弦交流电路称为正弦稳态电路。正弦稳态电路分析的经典分析方法就是求解电路微分方程的特解，这种方法数学过程繁琐、不易计算。本章引入正弦信号的相量表示方法，在引入了两类约束关系的相量形式后，重点讨论应用阻抗与导纳进行的相量电路分析，以及正弦稳态电路的功率特点和求解方法，并在此基础上讨论谐振电路。为扩大知识面，本章最后将简要介绍三相电路和理想变压器的基本知识。

4.1 正弦信号的基本概念

随时间按正弦规律变化的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 分别称为正弦电压和正弦电流，统称为正弦量。在信号理论中，正弦量是最基本的周期信号，当对同频率的正弦信号进行和、差、微分和积分等运算后，其结果仍为同频率的正弦信号。而且正弦信号是任何其他周期信号和非周期信号的基本元素，一般的信号都可以分解为许多不同频率的正弦信号的叠加。运用线性电路的叠加定理，就可以将正弦稳态电路的分析方法推广应用于任意信号激励下的线性电路。因此研究电路在正弦信号激励下的响应是研究电路在其他时变信号激励下的一般响应的分析基础。

4.1.1 正弦量的三要素

正弦量既可以用正弦函数表示，也可以用余弦函数表示，本书中统一用余弦函数表示标准正弦量。正弦电压 $u(t)$ 的一般表达式是

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

正弦电流 $i(t)$ 的一般表达式是

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

一般的正弦量可以统一表示为

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.1)$$

式中， F_m 是正弦量瞬时取值中的最大值，称为正弦量的振幅； ω 是正弦量在单位时间内变化的角度(单位：弧度/秒，rad/s)，反映了正弦量变化的快慢，称为正弦量的角频率； $(\omega t + \varphi)$ 反映了正弦量的变化

进程,称为正弦量的相位,当相位随时间连续变化时,正弦量的瞬时值也随之连续变化。 $t=0$ 时的相位为 φ ,称为初相位。初相位决定了正弦量在计时起点($t=0$)的大小,通常规定 $|\varphi| \leq \pi$ 。

由式(4.1)可以看出,一个正弦量可由其振幅、角频率和初相三个物理量来表征,把这三个物理量称为正弦量的三要素。正弦量的三要素是正弦量之间进行比较和区别的依据。

反映正弦量变化快慢物理量还可以是周期和频率,正弦量完成一个循环所需的时间称为周期(用字母 T 表示,单位:秒,s),每秒钟正弦量变化的次数称为频率(用字母 f 表示,单位:赫兹,Hz)。周期 T 、频率 f 和角频率 ω 三者之间的关系是

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (4.2)$$

我国大陆和香港地区、欧洲国家等普遍采用频率为50 Hz的正弦交流电,称为工业标准频率,简称工频。少数国家(如美国、日本等)使用的正弦交流电频率为60 Hz。

在其他各种不同的技术领域,使用着各种不同的频率。如高频炉的频率范围为200~300 kHz;中频炉的频率范围是500~8000 Hz;高速电动机的频率范围是150~2000 Hz;无线电工程上用的信号频率则高达 $10^4 \sim 30 \times 10^{10}$ Hz。

正弦信号还可以用波形图来表示,在波形图中同样可以清楚地表示正弦量的三要素。在绘制波形图时,横轴可取时间变量 t 也可以取相位变量 ωt ,纵轴取正弦量的瞬时变量 $f(t)$ 。当横轴取相位变量 ωt 时,初相位表示靠近坐标原点的正最大值所对应的角度,当 $\varphi > 0$ 时,正最大值在原点的左边,当 $\varphi < 0$ 时,正最大值在原点的右边(如果横轴取时间变量 t ,则用 φ/ω 代替 φ)。图4.1绘出了两个同频率、同振幅但初相不同的正弦信号 $f_0(t)$ 和 $f_1(t)$ 。

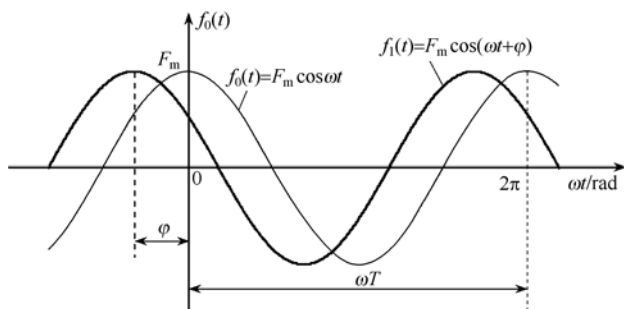


图 4.1 正弦信号波形图

4.1.2 有效值

在工程技术中通常需要一个特定的值来表征正弦量的大小。瞬时值时刻在变化,最大值反映的是正弦量达到极值时的瞬间大小,而正弦量在一个周期内的平均值为0,因此这些物理量都不适合表征正弦量的大小。

工程实际中常采用有效值来衡量正弦量的大小。交流电的有效值是根据电流的热效应来规定的。

交流电流 i 通过电阻 R 在一个周期 T 内产生的热量,如果与某一直流电流 I 通过同一电阻在相同时间内所产生的热量相等,则称这个直流电流值 I 是该交流电流 i 的有效值。即:如果

$$\int_0^T Ri^2 dt = RI^2 T$$

则

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (4.3)$$

称为交流电流 i 的有效值。式(4.3)表明,周期电流的有效值等于它的瞬时值的平方在一周期内的平均值的平方根。因此,有效值又称为均方根值(Root-mean-square value)。

当周期电流为正弦信号时,将 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ 代入式(4.3)得

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (4.4)$$

同理,正弦电压 $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ 的有效值为

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (4.5)$$

式(4.4)和式(4.5)表明,正弦量的有效值等于其振幅值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$,与角频率和初相无关,因此正弦电流和电压也可以表示为

$$\begin{aligned} i(t) &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) \end{aligned} \quad (4.6)$$

工程上所说的正弦电压或电流的大小一般均指有效值。如交流测量仪表所指示的读数、电气设备铭牌上标示的额定值和电网电压等级等都是指有效值。我们生活中交流电源为 220 V 电压,就是指有效值为 220 V、最大值为 311 V 的正弦电压。但必须注意,各种器件和电气设备的绝缘水平、耐压值却都是指最大值。

4.1.3 同频率正弦量的相位差

设有两个同频率的正弦量

$$\begin{aligned} f_1(t) &= F_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ f_2(t) &= F_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

它们的相位之差称为相位差,用 $\Delta\varphi$ 表示,即

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (4.7)$$

可见,同频率正弦量的相位差等于初相位之差。相位差与计时起点无关,因而常用相位差描述正弦量之间的相位关系。不同的计时起点,初相位 φ_1 和 φ_2 不同,但二者之差 $\Delta\varphi$ 却保持不变。

相位差 $\Delta\varphi$ ($\Delta\varphi \in [-\pi, \pi]$) 反映出正弦量 $f_1(t)$ 与正弦量 $f_2(t)$ 在时间上的超前和滞后关系:

- (1) 超前: 当 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ 时,称 $f_1(t)$ 超前 $f_2(t)$,超前的角度为 $\Delta\varphi$,表明 $f_1(t)$ 比 $f_2(t)$ 先到达正最大值;
- (2) 滞后: 当 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 < 0$ 时,称 $f_1(t)$ 滞后 $f_2(t)$,滞后的角度为 $|\Delta\varphi|$,表明 $f_1(t)$ 比 $f_2(t)$ 后到达正最大值;
- (3) 同相: 当 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ 时,称 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 同相,表明 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 步调一致,同时到达零值和正负最大值;
- (4) 反相: 当 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi$ 时,称 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 反相,表明 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 步调相反,一个到达正最大值而另一个则到达负最大值,一个是增加到零而另一个则减小到零;
- (5) 正交: 当 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ 时,称 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 正交,其特点是一个到达最大值时,另一个则为零。

两个同频率正弦量 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的不同相位差波形关系如图 4.2 所示。

在电工技术中同频率的电压之间、电流之间、电压与电流之间均可进行相位比较。两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号,且在主值范围比较。

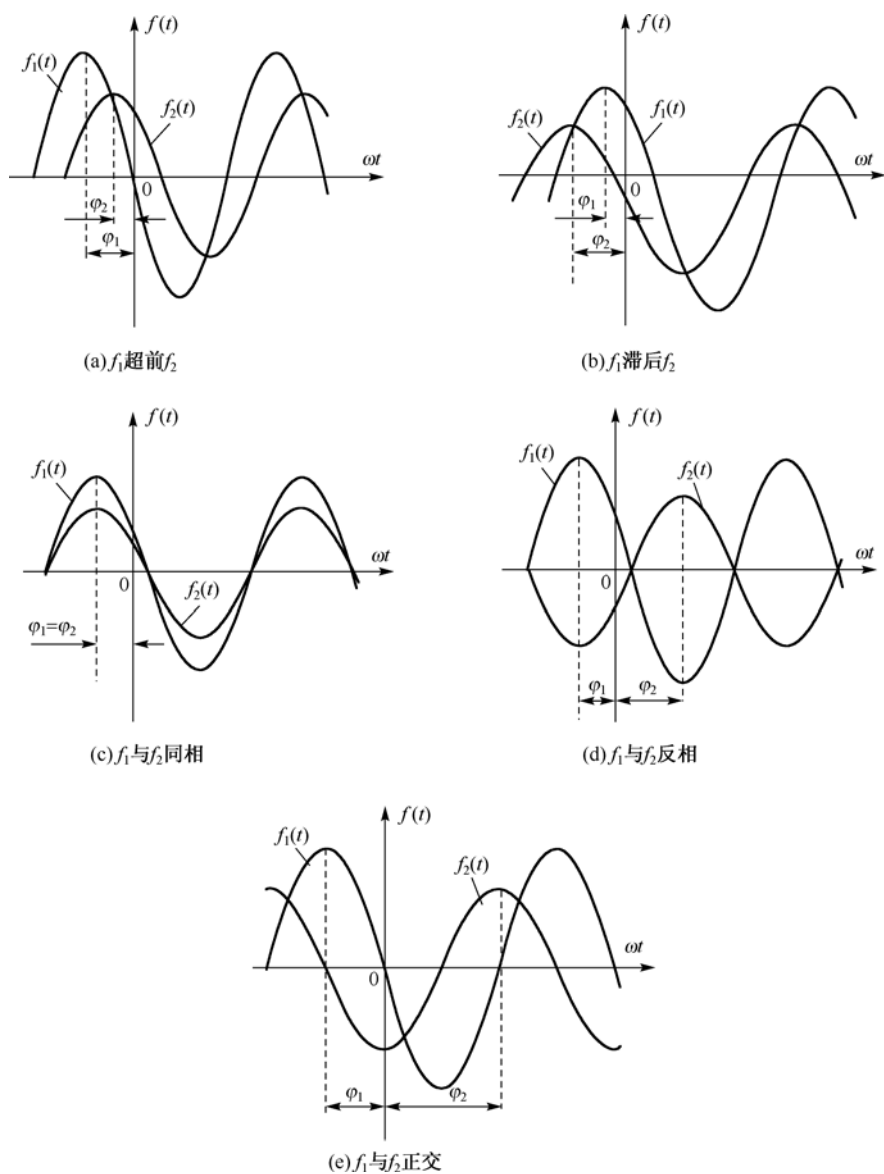


图 4.2 同频率正弦量的相位差

例 4.1 已知正弦电流 $i(t) = 20 \cos(314t + 60^\circ)$ A, 电压 $u(t) = 10\sqrt{2} \sin(314t - 30^\circ)$ V。试分别画出它们的波形图, 并求出它们的有效值、频率及相位差。

解: 先将电压 $u(t)$ 转化为标准表达式

$$\begin{aligned} u(t) &= 10\sqrt{2} \sin(314t - 30^\circ) \\ &= 10\sqrt{2} \cos(314t - 120^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

$i(t)$ 、 $u(t)$ 的有效值分别为

$$I = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14.142 \text{ A}$$

$$U = 10 \text{ V}$$

$i(t)$ 、 $u(t)$ 的频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \times 3.14} = 50 \text{ Hz}$$

$i(t)$ 、 $u(t)$ 的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -120^\circ - 60^\circ = -180^\circ$$

可见, $i(t)$ 与 $u(t)$ 反相。

$i(t)$ 、 $u(t)$ 的波形如图 4.3 所示。

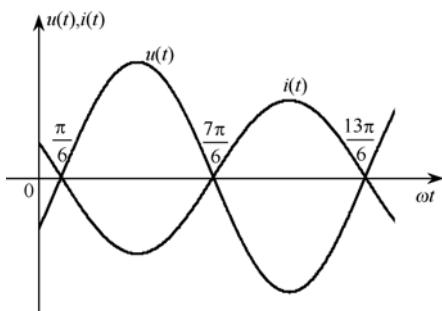


图 4.3 例 4.1 的波形

4.2 正弦量的相量表示

一个正弦量具有振幅(或有效值)、角频率(或周期、频率)和初相三个要素,当这三要素确定后,正弦量也就唯一地确定下来。表征正弦量的这三个要素的方法有很多,我们已经知道了两种表示法。一是三角函数表示法,如式(4.1)所示,这是正弦量的基本表示法;另一个是波形图法,如图 4.1 所示。这两种表示方法比较直观,但是直接用于分析和计算正弦交流电路就会很繁琐。

由数学理论可知,当激励为正弦量时,电路微分方程的特解(响应的强制分量)一定是与激励同频率的正弦量,反之亦然。这一结论具有普遍意义,即线性时不变电路在正弦电源激励下,各支路电压、电流的特解都是与电源同频率的正弦量。工程上将电路的这一特解状态称为正弦交流电路的稳定状态,简称正弦稳态。正弦稳态电路中,各支路电压、电流只在幅度和相位上有所不同,因此可以利用这一特点引入正弦量的另一种表示方法——相量表示法,从而使正弦稳态电路的分析和计算得到简化。

4.2.1 复数

1. 复数的表示形式

在数学上,复数有以下四种表示形式:

(1) 代数形式

形如

$$A = a_1 + ja_2 \quad (4.8)$$

的复数,称为复数的代数表达式。式中, $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位; a_1 、 a_2 均为实数,依次称为复数的实部和虚部,可以分别表示为:

$$\begin{aligned} a_1 &= \operatorname{Re}[A] \\ a_2 &= \operatorname{Im}[A] \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中, Re 表示对复数 A 取实部运算, Im 表示对复数 A 取虚部运算。

几何意义上,代数形式的复数对应复平面中的一个点,该点的横坐标就是复数的实部,而点的纵坐标代表复数的虚部,如图 4.4 所示。

(2) 三角形式

形如

$$A = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad (4.10)$$

的复数,称为复数的三角表达式。式中, r 称为复数的模; φ 称为复数的幅角。

复数 A 也可以用复平面中一条由原点 O 指向复数点 A 的有向线段 OA 来描述,如图 4.4 所示。有向线段 OA 的长度等于复数 A 的模;有向线段 OA 与正实轴的夹角等于复数的幅角。

显而易见, 复数 A 的代数形式和三角形式之间存在如下关系:

$$\begin{cases} a_1 = r \cdot \cos \varphi \\ a_2 = r \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} r = |A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \varphi = \arg[A] = \arctan \frac{a_2}{a_1} \end{cases} \quad (4.11)$$

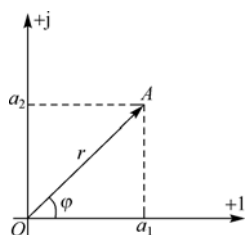


图 4.4 复数的几何表示

式(4.11)中, 幅角取值范围为 $|\varphi| \leq \pi$

(3) 指数形式

形如

$$A = r e^{j\varphi} \quad (4.12)$$

的复数, 称为复数的指数表达式。式中, r 也称为复数的模, φ 称为复数的幅角。根据欧拉公式, $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$, 可见式(4.10)和式(4.12)是等效的。

(4) 极坐标形式

在工程上常将复数的指数表示形式写为

$$A = r \angle \varphi \quad (4.13)$$

称式(4.13)为复数的极坐标表达式。

2. 复数的相等

若两个复数分别为

$$\begin{aligned} A &= a_1 + j a_2 \\ B &= b_1 + j b_2 \end{aligned}$$

当且仅当

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2 \end{aligned}$$

时

$$A = B$$

即两个用代数形式表示的复数, 若实部和虚部分别相等, 则这两个复数相等。

若两个复数分别为

$$\begin{aligned} A &= r_A e^{j\varphi_A} = r_A \angle \varphi_A \\ B &= r_B e^{j\varphi_B} = r_B \angle \varphi_B \end{aligned}$$

当且仅当

$$\begin{aligned} r_A &= r_B \\ \varphi_A &= \varphi_B \end{aligned}$$

时

$$A = B$$

即两个用极坐标形式表示的复数, 若它们的模相等, 幅角也相等, 则这两个复数相等。

3. 复数的运算

(1) 复数的加减运算

复数的加减运算规则是实部和虚部分别相加减, 因此, 复数的加、减运算采用代数表达式比较方便。设

$$A = a_1 + \mathrm{j}a_2$$

$$B = b_1 + \mathrm{j}b_2$$

则

$$A \pm B = (a_1 + \mathrm{j}a_2) \pm (b_1 + \mathrm{j}b_2) = (a_1 \pm b_1) + \mathrm{j}(a_2 \pm b_2) \quad (4.14)$$

复数的加、减运算也可以在复平面内用向量的加、减完成, 如图 4.5 所示, 它们均符合向量合成的平行四边形法则。

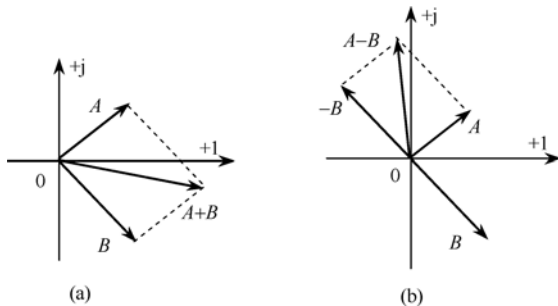


图 4.5 复数向量的加减运算

(2) 复数的乘除运算

复数的乘、除运算常采用指数形式或极坐标形式。若

$$A = r_A e^{\mathrm{j}\varphi_A} = r_A \angle \varphi_A$$

$$B = r_B e^{\mathrm{j}\varphi_B} = r_B \angle \varphi_B$$

则

$$A \cdot B = (r_A e^{\mathrm{j}\varphi_A}) \cdot (r_B e^{\mathrm{j}\varphi_B}) = r_A r_B e^{\mathrm{j}(\varphi_A + \varphi_B)} = r_A r_B \angle \varphi_A + \varphi_B \quad (4.15)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{r_A e^{\mathrm{j}\varphi_A}}{r_B e^{\mathrm{j}\varphi_B}} = \frac{r_A}{r_B} e^{\mathrm{j}(\varphi_A - \varphi_B)} = \frac{r_A}{r_B} \angle \varphi_A - \varphi_B \quad (4.16)$$

即复数的乘法运算满足模相乘, 辐角相加; 除法运算满足模相除, 辐角相减。

若两个复数采用代数形式, 则有

$$AB = (a_1 + \mathrm{j}a_2)(b_1 + \mathrm{j}b_2) = (a_1b_1 - a_2b_2) + \mathrm{j}(a_1b_2 + a_2b_1) \quad (4.17)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(a_1 + \mathrm{j}a_2)}{(b_1 + \mathrm{j}b_2)} = \frac{(a_1 + \mathrm{j}a_2)(b_1 - \mathrm{j}b_2)}{(b_1 + \mathrm{j}b_2)(b_1 - \mathrm{j}b_2)} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} + \mathrm{j} \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2} \quad (4.18)$$

例 4.2 已知 $A = -20 - \mathrm{j}20$, $B = 20\sqrt{2} \angle -45^\circ$, 求 $A+B$ 和 AB 的极坐标表达式。

解:

$$B = 20\sqrt{2} \angle -45^\circ = 20\sqrt{2} \cos(-45^\circ) + \mathrm{j}20\sqrt{2} \sin(-45^\circ) = 20 - \mathrm{j}20$$

$$A + B = (-20 - \mathrm{j}20) + (20 - \mathrm{j}20) = -\mathrm{j}40 = 40 \angle -90^\circ$$

$$A = (-20 - \mathrm{j}20) = 20\sqrt{2} \angle -135^\circ$$

$$AB = (20\sqrt{2} \angle -135^\circ)(20\sqrt{2} \angle -45^\circ) = 800 \angle -180^\circ$$

4.2.2 相量

设正弦电压 $u(t)$ 为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

由欧拉公式知道

$$U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) + j U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

可见

$$u(t) = \operatorname{Re} [U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}] = \operatorname{Re}(U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) \quad (4.19)$$

显然, 正弦电压 $u(t)$ 与复指数函数 $U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$ 形成一一对应的关系, 该复指数函数的常数部分 $U_m e^{j\varphi_u}$ 包含了正弦电压的两个要素: 振幅和初相位。由于正弦稳态电路中的电压、电流都是与激励电源同频率的正弦量, 因此这些正弦量可由其振幅和初相位唯一确定, 即由其对应的复指数函数的常数部分确定。定义:

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u} = U_m \angle \varphi_u \quad (4.20)$$

为正弦电压 $u(t)$ 的最大值相量。表示为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \Leftrightarrow \dot{U}_m = U_m \angle \varphi_u$$

而

$$\dot{U} = U e^{j\varphi_u} = U \angle \varphi_u \quad (4.21)$$

称为正弦电压 $u(t)$ 的有效值相量。表示为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \Leftrightarrow \dot{U} = U \angle \varphi_u$$

显然

$$\dot{U}_m = \sqrt{2} \dot{U} \quad (4.22)$$

最大值相量和有效值相量都简称为相量, 根据相量符号是否有下标 m 加以区分。需要注意的是, 正弦量对应的相量是一个复数, \dot{U} 和 \dot{U}_m 中的 “ \cdot ” (点) 号既表示这一复数与正弦量关联的特殊身份, 以区别于一般的复数, 同时也区别于正弦量的有效值。同理, 也可定义正弦电流及其他正弦量的相量。

任意复数与复平面上的矢量一一对应, 相量既然是复数, 必然也可以用与此复数相对应的矢量表示。相量在复平面中表示的图形称为相量图。相量线段的长短代表正弦量的最大值或有效值, 与正实轴的夹角代表正弦量的初相位, 如图 4.6 所示。

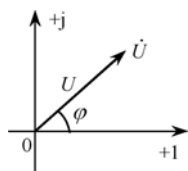


图 4.6 正弦量的相量图

例 4.3 已知 $i_1(t) = 15\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$, $i_2(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$ 。(1) 求 $i_1(t)$ 的相量 \dot{I}_1 , $i_2(t)$ 的相量 \dot{I}_2 ; (2) 画出 \dot{I}_1 及 \dot{I}_2 的相量图。

解: (1) 依据正弦量与其相量的对应关系, 可以直接写出正弦量的相量。

$i_1(t)$ 的相量 \dot{I}_1 为

$$\dot{I}_1 = 15 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$i_2(t)$ 的相量 \dot{I}_2 为

$$\dot{I}_2 = 10 \angle -30^\circ \text{ A}$$

(2) \dot{I}_1 及 \dot{I}_2 的相量图如图4.7所示。

例4.4 已知有效值相量 $\dot{I}_1 = 10\angle -60^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_2 = 20\angle 150^\circ \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$ 。试求出对应的正弦量。

解: 由 $f = 50 \text{ Hz}$, 可得

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$$

因此

$$i_1(t) = 10\sqrt{2} \cos(314t - 60^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 20\sqrt{2} \cos(314t + 150^\circ) \text{ A}$$

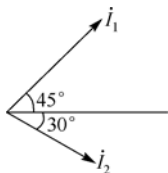


图4.7 \dot{I}_1 及 \dot{I}_2 的相量图

4.3 正弦稳态电路的相量模型

基尔霍夫定律和电路元件的伏安关系是分析各种电路的理论基础。为了利用相量的方法来分析正弦稳态电路, 本节介绍正弦交流电路中这两类约束关系的相量形式, 并在此基础上建立分析正弦稳态电路的相量模型。

4.3.1 基尔霍夫定律的相量形式

1. 基尔霍夫电流定律的相量形式

基尔霍夫电流定律可表述为: 对于集总参数电路中任一节点, 在任意时刻, 与该节点相连的所有支路电流满足

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_k + \cdots = 0 \text{ 或 } \sum i = 0$$

当式中的电流全部是同频率的正弦量时, 各个电流都可以用其相量表示, 即

$$\sum i(t) = \sum \text{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] = \text{Re}[e^{j\omega t} \sum \dot{I}_m] = \text{Re}[e^{j\omega t} \sum \sqrt{2}\dot{I}] = 0$$

所以

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \cdots + \dot{I}_k + \cdots = 0 \text{ 或 } \sum \dot{I} = 0 \quad (4.23)$$

即电路中任一结点上同频率正弦电流对应相量的代数和为零。

2. 基尔霍夫电压定律的相量形式

基尔霍夫电压定律可表述为: 对于集总参数电路中任一回路, 在任意时刻, 沿该回路的所有支路电压满足

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots = 0 \text{ 或 } \sum u = 0$$

当式中的电压全部是同频率的正弦量时, 各个电压都可以用其相量表示, 即

$$\sum u(t) = \sum \text{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \text{Re}[e^{j\omega t} \sum \dot{U}_m] = \text{Re}[e^{j\omega t} \sum \sqrt{2}\dot{U}] = 0$$

所以

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \cdots + \dot{U}_k + \cdots = 0 \text{ 或 } \sum \dot{U} = 0 \quad (4.24)$$

即电路中任一回路中同频率正弦电压对应相量的代数和为零。

需要注意的是, 在正弦交流电路中, 由于各正弦量之间存在相位差, 一般不会同时到达最大值, 所以, 各节点所连支路的电流及各回路中的各支路电压的最大值和有效值的代数和一般不为零。即

$$\sum I_m \neq 0 \quad \sum I \neq 0$$

$$\sum U_m \neq 0 \quad \sum U \neq 0$$

例 4.5 电路如图 4.8(a) 所示, 已知

$$i_1(t) = 3\sqrt{2} \cos 314t \text{ A}$$

$$i_2(t) = 5\sqrt{2} \cos(314t - 60^\circ) \text{ A}$$

试求总电流, 并做出相量图。

解: 首先求出正弦电流对应的相量

$$\dot{I}_1 = 3 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = 5 \angle -60^\circ \text{ A}$$

由 KCL 的相量形式, 可得

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 3 + 5 \cos(-60^\circ) + j5 \sin(-60^\circ)$$

$$= 5.5 - j4.33 = 7 \angle -38.2^\circ \text{ A}$$

相量图如图 4.8(b) 所示。

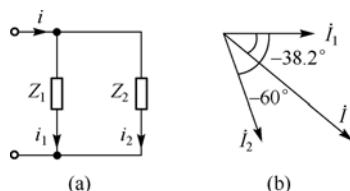


图 4.8 例 4.5 图

4.3.2 无源二端元件伏安关系的相量形式

在正弦稳态电路中, 基本的无源元件是电阻、电感和电容, 在关联参考方向下, 这三个元件的伏安关系分别为

$$u = Ri \quad (4.25)$$

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (4.26)$$

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (4.27)$$

设它们分别接在一正弦稳态电路中, 如图 4.9 所示, 则元件两端的电压和电流可表示为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} \dot{U} e^{j\omega t})$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t})$$

其中

$$\dot{U} = U e^{j\varphi_u} = U \angle \varphi_u$$

$$\dot{I} = I e^{j\varphi_i} = I \angle \varphi_i$$

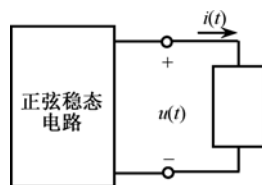


图 4.9 元件接于正弦稳态电路中

1. 电阻元件

当正弦稳态电路中接入线性电阻元件时, 电路如图 4.10(a) 所示, 根据欧姆定律

$$u = Ri$$

可得

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = RI_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

因此

$$U_m = RI_m \quad \text{或} \quad U = RI \quad (4.28)$$

$$\varphi_u = \varphi_i \quad (4.29)$$

式(4.28)和式(4.29)表明,线性电阻元件上的电压、电流同相位,它们的振幅和有效值之间的关系各自满足欧姆定律。

因为电流 $i(t)$ 的相量为

$$\underline{I} = I / \varphi_i$$

电压 $u(t)$ 的相量为

$$\underline{U} = U / \varphi_u = RI / \varphi_i$$

所以

$$\underline{U} = R \underline{I} \quad (4.30)$$

式(4.30)称为电阻伏安特性(欧姆定律)的相量形式,图4.10(b)、(c)依次是其电压电流的波形图和相量图。

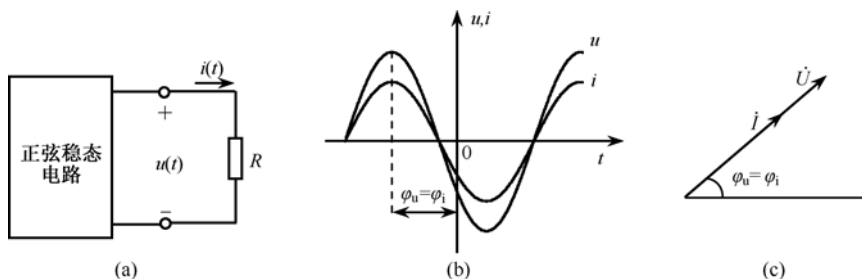


图 4.10 电阻元件的电压电流关系图

2. 电感元件

当正弦稳态电路中接入线性电感元件时,电路如图4.11(a)所示,根据电感元件伏安关系

$$u = L \frac{di}{dt}$$

可得

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di}{dt} = L \frac{d[\sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i)]}{dt} = -\sqrt{2}IL\omega \sin(\omega t + \varphi_i) \\ &= \sqrt{2}IL\omega \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) = \sqrt{2}IX_L \cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) \end{aligned} \quad (4.31)$$

式(4.31)中

$$\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ$$

是电压 $u(t)$ 的初相位。由此可见,电感电压 $u(t)$ 超前于电流 $i(t)$ 的相位为 90° 。

在式(4.31)中, $U = X_L I$ 是电压 $u(t)$ 的有效值,而

$$X_L = \omega L$$

是电感电压 $u(t)$ 的有效值(或最大值)与电流 $i(t)$ 的有效值(或最大值)之比,称为电感的电抗,简称感抗,其单位是欧姆(Ω)。感抗 X_L 是正弦交流电路的一个重要物理量,表示电感对交流电流的阻碍作用,与电阻作用类似,但性质不同。电阻是由于电荷定向运动与导体分子之间摩擦碰撞引起的,而感抗则是由于自感电动势反抗电流的变化而引起的。感抗与频率有关,频率越高,感抗越大,表明电感对高频

电流阻碍作用越大；对于直流而言，频率为零，则感抗为零，因此直流时电感视为短路，所以电感具有“通直流阻交流”的作用。

因为电流 $i(t)$ 的相量为

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i$$

电压 $u(t)$ 的相量为

$$\underline{U} = U \angle \varphi_u = X_L I \angle \varphi_i + 90^\circ$$

所以

$$\underline{U} = jX_L \underline{I} \quad (4.32)$$

式(4.32)称为电感伏安特性的相量形式，图4.11 (b)、(c)依次是其电压电流的波形图和相量图。

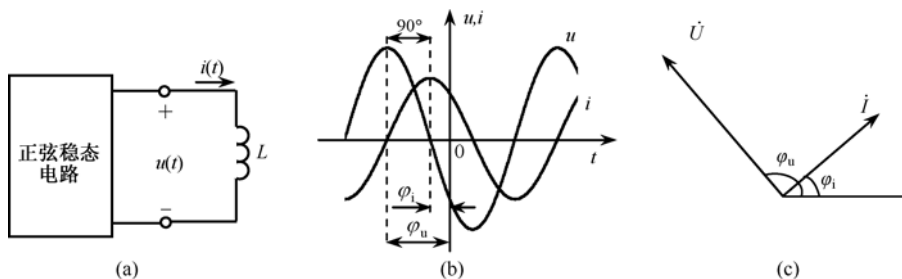


图 4.11 电感元件的电压电流关系图

3. 电容元件

当正弦稳态电路中接入线性电感元件时，电路如图 4.12 (a) 所示，根据电容元件伏安关系

$$i = C \frac{du}{dt}$$

可得

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du}{dt} = C \frac{d[\sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u)]}{dt} = -\sqrt{2}UC\omega \sin(\omega t + \varphi_u) \\ &= \sqrt{2}UC\omega \cos(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) = \sqrt{2}U \left(\frac{1}{X_C} \right) \cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \end{aligned} \quad (4.33)$$

式(4.33)中

$$\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$$

是电流 $i(t)$ 的初相位。由此可见，电容电流 $i(t)$ 超前于电压 $u(t)$ 的相位为 90° 。

在式(4.33)中， $I = U/X_C$ 是电流 $i(t)$ 的有效值，而

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

是电容电压 $u(t)$ 的有效值(或最大值)与电流 $i(t)$ 的有效值(或最大值)之比，称为电容的电抗，简称容抗，其单位是欧姆(Ω)。容抗 X_C 是正弦交流电路的一个重要物理量，表示电容对交流电流的阻碍作用。容抗与频率有关，频率越高，容抗越小，表明电容对高频电流有较大的传导作用；对于直流而言，由于频率为零，所以容抗趋于无穷大，可将电容视为开路，所以电容具有“隔直流通交流”的作用。

因为电压 $u(t)$ 的相量为

$$\underline{U} = U \angle \varphi_u$$

电流 $i(t)$ 的相量为

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i = \frac{U}{X_C} \angle \varphi_u + 90^\circ$$

所以

$$\underline{U} = -jX_C \underline{I} \quad (4.34)$$

式(4.34)称为电容伏安特性的相量形式, 图 4.12(b)、(c) 依次是其电压电流的波形图和相量图。

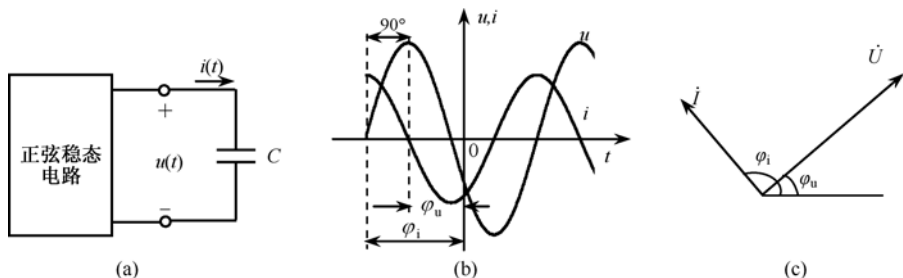


图 4.12 电容元件的电压电流关系图

例 4.6 电路如图 4.11(a) 所示, 已知 $L = 2 \text{ H}$, $U_L = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $\varphi_u = 30^\circ$ 。试求 $i_L(t)$ 。

解: 由 $f = 50 \text{ Hz}$, 可得

$$\omega L = 2\pi fL = 200\pi$$

因此

$$\underline{U}_L = 220 \angle 30^\circ$$

$$\underline{I}_L = \frac{220 \angle 30^\circ}{j200\pi} = 0.35 \angle -60^\circ$$

$$i_L(t) = 0.35\sqrt{2} \cos(100\pi t - 60^\circ) \text{ A}$$

例 4.7 电路如图 4.12(a) 所示, 已知 $C = 50 \mu\text{F}$, $\underline{I}_C = 2 \angle 45^\circ \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$ 。试求 U_C 并画出相量图。

解: 由 $f = 50 \text{ Hz}$, 可得

$$\omega C = 2\pi fC = 5000\pi \times 10^{-6}$$

则

$$U_C = \frac{I_C}{\omega C} = 127 \text{ V}$$

相量图如图 4.13 所示。

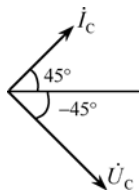


图 4.13 例 4.7 相量图

4.3.3 电路的相量模型

我们已经介绍了三种基本无源元件电阻、电感和电容的伏安关系的相量形式, 即为

$$\begin{cases} \underline{U}_R = R \underline{I}_R \\ \underline{U}_L = jX_L \underline{I}_L \\ \underline{U}_C = -jX_C \underline{I}_C \end{cases} \quad (4.35)$$

式(4.35)表明,电阻、电感和电容的电压相量与电流相量之比等于一个复常数,它反映了元件对正弦电流的一种阻碍作用。为了便于研究,可将式(4.35)统一写为

$$\dot{U} = Z\dot{I} \quad (4.36)$$

或

$$\dot{I} = Y\dot{U} \quad (4.37)$$

式(4.36)和式(4.37)中,常数 Z 和常数 Y 分别称为元件的阻抗(单位为欧姆,用 Ω 表示)和导纳(单位为西门子,用 S 表示)。显然,电阻、电感、电容元件伏安关系的相量形式与电阻电路中的欧姆定律的数学表达式形式相似。因此,可以据此建立正弦稳态电路的相量等效电路。

在正弦稳态电路中,将各电流电压用相量表示,电阻、电感、电容元件的参数用阻抗(或导纳)表示,所得到的电路图称为正弦稳态电路的相量模型,而原电路图则称为正弦交流电路的时域模型。相量模型反映了电路中各电流、电压相量之间的关系,时域模型反映了各电流和电压瞬时值之间的关系。

对相量模型进行分析可依据两类约束关系的相量方程,它与电阻电路中两类约束关系的时域关系相比,形式上完全相同。不同的是:前者为复数方程,而后者为实数方程;前者中的电压电流用相量表示,而后者中的电压电流是随时间变化的函数;前者中的无源元件用电阻 R 、电感 L 和电容 C 所对应的阻抗 Z 或导纳 Y 表示,而后者是用这些元件的参数表示。注意到这一对应关系后,分析电阻电路的一些公式和方法,就可以完全用到正弦稳态电路分析中。

运用相量模型进行正弦稳态电路分析时,一般需要三个步骤:

- (1) 写出已知正弦量的相量及各无源元件的阻抗或导纳;
- (2) 做出原电路的相量模型,列出相应的相量关系,求解待求量的相量;
- (3) 根据求解出的待求量的相量,写出对应的正弦量。

例 4.8 电路如图 4.14(a) 所示, $u_s(t) = 10\cos(1000t)$ V, 求 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 、 $i_3(t)$ 及 $i(t)$ 。

解: 由 $u_s(t) = 10\cos 1000t$, 可知

$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

$$\dot{U}_{sm} = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

则

$$\dot{U}_s = 5\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$j\omega L = j1 \text{ k}\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C} = -j1 \text{ k}\Omega$$

该电路的相量模型如图 4.14(b) 所示。

根据式(4.35)及 KCL 的相量关系,可得

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{R} = \frac{5\sqrt{2} \angle 0^\circ}{1000} = 5\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ mA}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_s}{1/j\omega C} = \frac{5\sqrt{2} \angle 0^\circ}{-j1000} = 5\sqrt{2} \angle 90^\circ \text{ mA}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_s}{j\omega L} = \frac{5\sqrt{2} \angle 0^\circ}{j1000} = 5\sqrt{2} \angle -90^\circ \text{ mA}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 5\sqrt{2} + j5\sqrt{2} - j5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ mA}$$

对应的正弦量分别为

$$i_1(t) = 0.01 \cos(1000t) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 0.01 \cos(1000t + 90^\circ) \text{ A}$$

$$i_3(t) = 0.01 \cos(1000t - 90^\circ) \text{ A}$$

$$i(t) = 0.01 \cos(1000t) \text{ A}$$

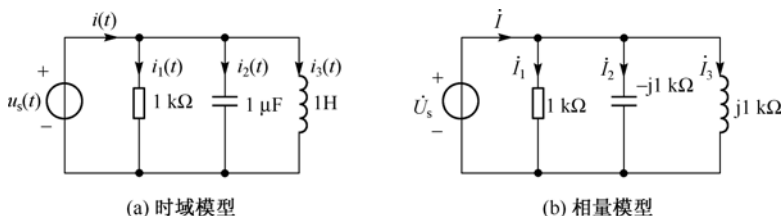


图 4.14 例 4.8 电路图

例 4.9 正弦稳态电路如图 4.15 所示, 已知交流电压表 V_1 读数为 60 V, V_2 读数为 80 V, 求 V 读数。

解: 由于电阻 R 和电感 L 串联, 电流相等, 因此可假设它们的电流为参考相量, 即设:

$$\dot{I} = I \angle 0^\circ \text{ A}$$

则电阻 R 和电感 L 的电压相量分别为

$$\dot{U}_1 = 60 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_2 = 80 \angle 90^\circ \text{ V}$$

由 KVL 的相量形式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 60 \angle 0^\circ + 80 \angle 90^\circ \\ &= 60 + j80 \\ &= 100 \angle 53.1^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

因此

$$|\dot{U}| = 100 \text{ V}$$

即电压表 V 上的读数为 100 V。

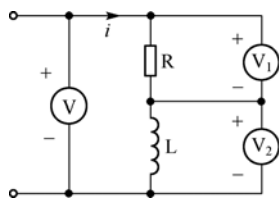


图 4.15 例 4.9 电路图

4.4 无源二端网络的等效阻抗与导纳

4.4.1 二端网络的阻抗与导纳

图 4.16(a) 所示为一个不含独立源的二端网络 N_0 , 当在角频率为 ω 的正弦电源激励下处于稳定状态时, 端口的电压与电流是同频率的正弦量, 其相量依次为

$$\dot{U} = U \angle \varphi_u$$

$$\dot{I} = I \angle \varphi_i$$

则

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle \varphi_u - \varphi_i = |Z| \angle \varphi_z \quad (4.38)$$

或

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{U} \angle \varphi_i - \varphi_u = |Y| \angle \varphi_Y \quad (4.39)$$

Z 称为无源二端网络的阻抗, 其单位为 Ω 。 Z 不是正弦量, 而是一个复数, 也称为复阻抗。式 (4.38) 中

$$|Z| = \frac{U}{I}$$

为阻抗的模, 而

$$\varphi_z = \varphi_u - \varphi_i$$

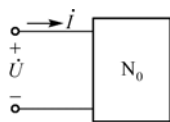
称为阻抗角。阻抗既反映了二端网络端口正弦电压与正弦电流的有效值之间的大小关系, 又反映了二者的相位关系。在正弦稳态电路的相量模型中, 阻抗 Z 的电路符号与电阻相同, 如图 4.16(b) 所示。 Z 的代数形式为

$$Z = R + jX \quad (4.40)$$

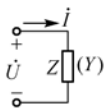
式 (4.40) 中, R 为阻抗的实部, 称为阻抗的电阻分量; X 为阻抗的虚部, 称为阻抗的电抗分量。 $X > 0$ 时, $\varphi_u - \varphi_i > 0$, 二端网络的端口电压相位超前于电流相位, 称二端网络呈现电感性; $X < 0$ 时, $\varphi_u - \varphi_i < 0$, 二端网络的端口电压相位滞后于电流相位, 称二端网络呈现电容性; $X = 0$ 时, $\varphi_u = \varphi_i$, 二端网络的端口电压与电流相位相同, 称二端网络呈现电阻性。

Z 在复平面上可用直角三角形表示, 如图 4.17 所示, 称为阻抗三角形。显然有

$$R = |Z| \cos \varphi, \quad X = |Z| \sin \varphi, \quad |Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi_z = \arctan \frac{X}{R} \quad (4.41)$$



(a) 无源二端网络



(b) 阻抗与导纳

图 4.16 无源二端网络的阻抗与导纳

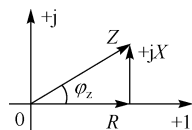


图 4.17 阻抗三角形

同理, 式 (4.39) 中的 Y 称为无源二端网络的导纳, 其单位为 S , Y 也不是正弦量, 是一个复数。其中

$$|Y| = \frac{I}{U}$$

为导纳的模, 而

$$\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u$$

称为导纳角。导纳 Y 既反映了二端网络端口正弦电压与正弦电流的有效值的关系, 又反映了二者相角关系。导纳 Y 的电路符号与电阻相同, 如图 4.16(b) 所示。 Y 的代数形式为

$$Y = G + jB \quad (4.42)$$

式 (4.42) 中, G 为导纳的实部, 称为导纳的电导分量, B 为导纳的虚部, 称为导纳的电纳分量。 $B > 0$ 时, $\varphi_i - \varphi_u > 0$, 二端网络的端口电流相位超前于电压相位, 称二端网络呈现电容性; $B < 0$ 时, $\varphi_i - \varphi_u < 0$, 二端网络的端口电流相位滞后于电压相位, 称二端网络呈现电感性; $X = 0$ 时, $\varphi_i = \varphi_u$, 二端网络的端口电流与电压相位相同, 称二端网络呈现电阻性。

Y 在复平面上可用直角三角形表示, 如图 4.18 所示, 称为导纳三角形。显然有

$$G = |Y| \cos \varphi_Y, \quad B = |Y| \sin \varphi_Y, \quad |Y| = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \varphi_Y = \arctan \frac{B}{G} \quad (4.43)$$

对比式(4.38)与式(4.39)可知

$$Z = \frac{1}{Y} \quad (4.44)$$

对于同一个二端网络,虽然阻抗 Z 与导纳 Y 互为倒数,但在一般情况下

$$G \neq \frac{1}{R}, \quad B \neq \frac{1}{X}$$

G 、 B 与 R 、 X 之间的关系应当由式(4.44)来确定,即

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \left(\frac{-X}{R^2 + X^2} \right) = G + jB$$

因而

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

同理

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \left(\frac{-B}{G^2 + B^2} \right) = R + jX$$

得

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

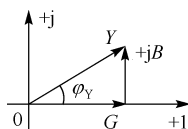


图 4.18 导纳三角形

4.4.2 阻抗与导纳的串、并联

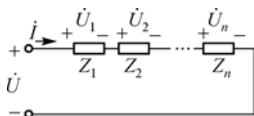
在正弦稳态相量模型中,阻抗串联和并联的等效计算,形式上与电阻电路中电阻串联和并联的等效相似。对于 n 个阻抗串联的电路,如图4.19(a)所示,由基尔霍夫电压定律可得

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + \dots + Z_n \dot{I} = \dot{I}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) = \dot{I}Z$$

所以,电路的等效阻抗 Z 为

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \quad (4.45)$$

即串联电路的等效复阻抗等于各部分的复阻抗之和,其等效电路如图4.19(b)所示。



(a) 阻抗的串联



(b) 等效复阻抗

图 4.19 阻抗的串联型

在阻抗串联的电路中,任意阻抗的电压分配为

$$\dot{U}_k = \frac{Z_k}{Z} \dot{U} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.46)$$

式(4.46)中 \dot{U}_k 为第 k 个阻抗 Z_k 上的电压相量, \dot{U} 为端口上的总电压相量。

同理,如果电路由 n 个导纳并联组成,如图 4.20(a)所示,由基尔霍夫电流定律得

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = \dot{U} Y_1 + \dot{U} Y_2 + \dots + \dot{U} Y_n = \dot{U}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = \dot{U} Y$$

所以

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (4.47)$$

即并联电路等效复导纳等于各部分导纳之和，其等效电路如图 4.20(b) 所示。

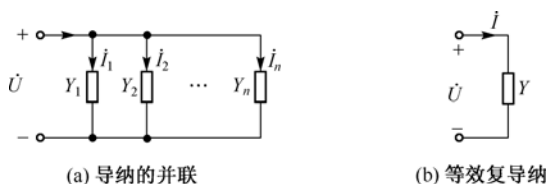


图 4.20 导纳的并联

在导纳并联的电路中，任意导纳的电流分配为

$$\dot{I}_k = \frac{Y_k}{Y} \dot{I} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (4.48)$$

式(4.48)中 \dot{I}_k 为第 k 个导纳 Y_k 上的电流相量， \dot{I} 为二端网络端口上的总电流相量。

例 4.10 已知图 4.21(a) 所示电路。求在电源角频率分别为 $\omega=1 \text{ rad/s}$ 和 $\omega=4 \text{ rad/s}$ 的两种情况下，该电路的最简等效电路。

解：(1) 当 $\omega=1 \text{ rad/s}$ 时

$$Z_L = j\omega L = j0.25 \Omega,$$

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j2 \Omega$$

相应的相量模型如图 4.21(b) 所示，则

$$Z = (1 + j0.25) + \frac{1 \times (-j2)}{1 - j2} = (1.8 - j0.15) \Omega$$

显然，此时二端网络呈现电容性，可等效为一个 1.8Ω 的电阻与一个容抗为 0.15Ω 的电容相串联。由容抗的定义式

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

可得

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{20}{3} \text{ F}$$

最简等效电路如图 4.21(d) 所示。

(2) 当 $\omega=4 \text{ rad/s}$ 时

$$Z_L = j\omega L = j1 \Omega,$$

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j0.5 \Omega$$

相应的相量模型如图 4.21(c) 所示，则

$$Z = (1 + j) + \frac{1 \times (-j0.5)}{1 - j0.5} = (1.2 + j0.6) \Omega$$

显然，此时二端网络呈现电感性，可等效为一个 1.2Ω 的电阻与一个感抗为 0.6Ω 的电感相串联。由感抗的定义式

$$X_L = \omega L$$

可得

$$L = \frac{X_L}{\omega} = 0.15 \text{ H}$$

最简等效电路如图 4.21 (e) 所示。

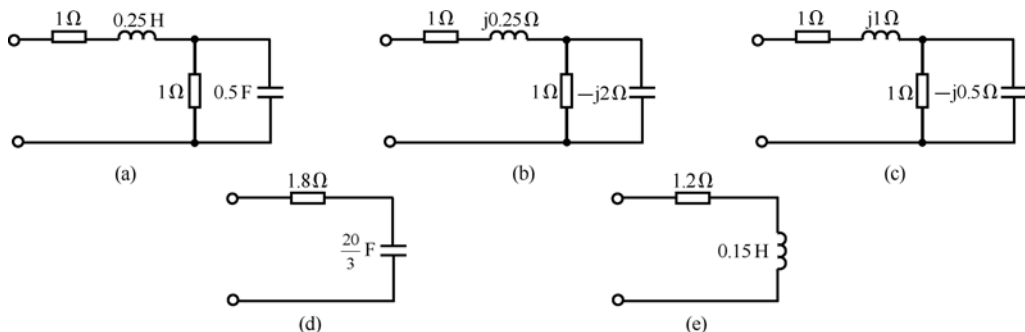


图 4.21 例 4.10 图

4.4.3 RLC 串联的交流电路

电阻 R 、电感 L 、电容 C 串联电路如图 4.22 (a) 所示，根据 KVL 可得

$$u = u_R + u_L + u_C$$

当电路在正弦交流电源激励下达到稳态时，对应的相量模型如图 4.22 (b) 所示，所以

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{I}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \\ &= \dot{I}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = \dot{I}[R + j(X_L - X_C)] = \dot{I}(R + jX) = \dot{I}Z \end{aligned} \quad (4.49)$$

式 (4.49) 中， $X_L = \omega L$ 为感抗， $X_C = 1/(\omega C)$ 为容抗， $X = X_L - X_C$ 为电抗， Z 则为电路的等效阻抗，如图 4.22 (c) 所示，且

$$\begin{aligned} Z &= |Z| \angle \varphi_Z = R + jX = R + j(X_L - X_C) \\ |Z| &= \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ \varphi_Z &= \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} \end{aligned}$$

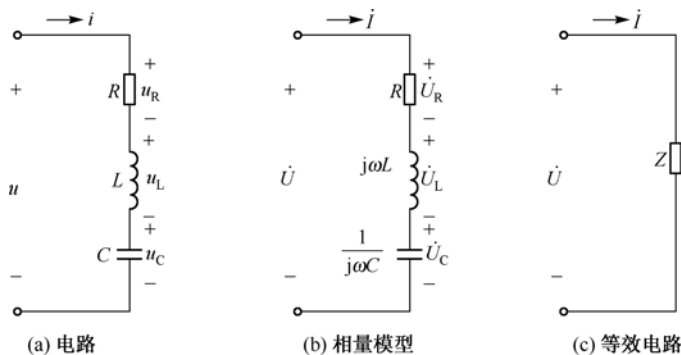


图 4.22 RLC 串联电路

根据电抗分量的取值情况, 电路可呈现三种性质:

(1) 电感性电路

当 $X > 0$ 时, 即 $X_L > X_C$ 时, $\varphi_Z > 0$, 电压 u 比电流 i 的相位超前 φ_Z , 电路呈现电感性, 电路可等效为一个电阻与电感元件相串联, 等效电感的感抗 $X = X_L - X_C$, 以电流 \dot{I} 为参考相量的相量图如图 4.23 (a) 所示。

(2) 电容性电路

当 $X < 0$ 时, 即 $X_L < X_C$ 时, $\varphi_Z < 0$, 电压 u 比电流 i 的相位滞后 $|\varphi_Z|$, 电路呈现电容性, 电路可等效为一个电阻与电容元件相串联, 等效电容的容抗 $X = X_C - X_L$, 以电流 \dot{I} 为参考相量的相量图如图 4.23 (b) 所示。

(3) 纯电阻电路

当 $X = 0$ 时, 即 $X_L = X_C$ 时, $\varphi_Z = 0$, 电压 u 与电流 i 同相, 电路呈现电阻性, 此时电路可等效为一个电阻, 以电流 \dot{I} 为参考相量的相量图如图 4.23 (c) 所示。

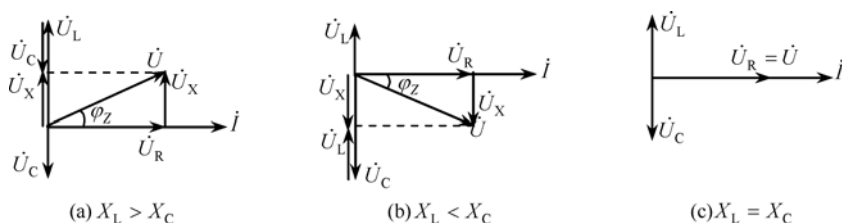


图 4.23 RLC 串联电路的相量图

由图 4.23 (a)、(b) 可以看出, \dot{U} 、 \dot{U}_R 、 \dot{U}_X 组成一个直角三角形, 通常称为电压三角形。

例 4.11 电路如图 4.22 (a) 所示, 已知电源 $u(t) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t + 60^\circ) \text{ V}$, 频率 $f = 3 \times 10^4 \text{ Hz}$, $R = 15 \text{ }\Omega$, $L = 0.3 \text{ mH}$, $C = 0.2 \text{ }\mu\text{F}$ 。求电路电流和各元件电压, 并绘出电路的相量图。

解: 电路的相量模型如图 4.22 (b) 所示, 其中

$$\dot{U} = 5\angle 60^\circ \text{ V}$$

$$j\omega L = j2\pi \times 3 \times 10^4 \times 0.3 \times 10^{-3} = j56.5 \text{ }\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{2\pi \times 3 \times 10^4 \times 0.2 \times 10^{-6}} = -j26.5 \text{ }\Omega$$

因此电路等效阻抗为

$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 15 + j56.5 - j26.5 = 33.54 \angle 63.4^\circ \text{ }\Omega$$

电路电流为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{5\angle 60^\circ}{33.54\angle 63.4^\circ} = 0.149 \angle -3.4^\circ \text{ A}$$

电阻电压为

$$\dot{U}_R = R\dot{I} = 15 \times 0.149 \angle -3.4^\circ = 2.235 \angle -3.4^\circ \text{ V}$$

电感电压为

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = 56.5\angle 90^\circ \times 0.149 \angle -3.4^\circ = 8.42 \angle 86.4^\circ \text{ V}$$

电容电压为

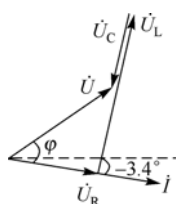


图 4.24 例 4.11 图

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I} = 26.5 \angle -90^\circ \times 0.149 \angle -3.4^\circ = 3.95 \angle -93.4^\circ \text{ V}$$

电路电压、电流的相量图如图 4.24 所示, 各量的瞬时值表达式为

$$i(t) = 0.149\sqrt{2} \cos(\omega t - 3.4^\circ) \text{ A}$$

$$u_R(t) = 2.235\sqrt{2} \cos(\omega t - 3.4^\circ) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 8.42\sqrt{2} \cos(\omega t + 86.6^\circ) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 3.95\sqrt{2} \cos(\omega t - 93.4^\circ) \text{ V}$$

需要特别说明的是, 这里 $U_L = 8.42 \text{ V} > U = 5 \text{ V}$, 说明正弦电路中电路元件两端电压的有效值有可能大于电源电压的有效值。

4.4.4 GLC 并联的交流电路

G、L、C 并联电路是 R、L、C 串联电路的对偶电路, 其电路如图 4.25(a) 所示。根据 KCL 可得

$$i = i_R + i_L + i_C$$

当电路在正弦交流电源激励下达到稳态时, 对应的相量模型如图 4.25(b) 所示, 所以

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = G\dot{U} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U} = \dot{U}\left(G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right) \\ &= \dot{U}\left[G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right] = \dot{U}[G + j(B_C - B_L)] = \dot{U}(G + jB) = \dot{U}Y \end{aligned} \quad (4.50)$$

式(4.50)中, $B_C = \omega C$ 为容纳, $B_L = 1/(\omega L)$ 为感纳, $B = B_C - B_L$ 为电纳, Y 则为电路的等效导纳, 如图 4.25(c) 所示, 且

$$Y = |Y| \angle \varphi_Y = G + jB = G + j(B_C - B_L)$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}$$

$$\varphi_Y = \arctan \frac{B}{G} = \arctan \frac{B_C - B_L}{G}$$

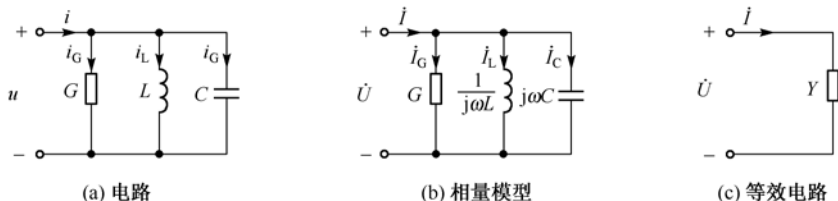


图 4.25 GLC 并联电路

根据电纳分量的取值情况, 电路可呈现三种性质:

(1) 电容性电路

当 $B > 0$ 时, 即 $B_C > B_L$ 时, $\varphi_Y > 0$, 电压 u 比电流 i 的相位滞后 φ_Y , 电路呈现电容性, 电路可等效为一个电阻与电容元件相并联, 等效电容的容纳 $B = B_C - B_L$, 以电压 \dot{U} 为参考相量的相量图如图 4.26(a) 所示。

(2) 电感性电路

当 $B < 0$ 时, 即 $B_C < B_L$ 时, $\varphi_Y < 0$, 电压 u 比电流 i 的相位超前 $|\varphi_Y|$, 电路呈现电感性, 电路可

等效为一个电阻与电感元件相并联, 等效电感的感纳 $B = B_L - B_C$, 以电压 \dot{U} 为参考相量的相量图如图 4.26(b) 所示。

(3) 纯电阻电路

当 $B=0$ 时, 即 $B_C=B_L$ 时, $\varphi_Y=0$, 电压 u 与电流 i 同相, 电路呈现电阻性, 此时电路可等效为一个电阻, 以电压 \dot{U} 为参考相量的相量图如图 4.26(c) 所示。

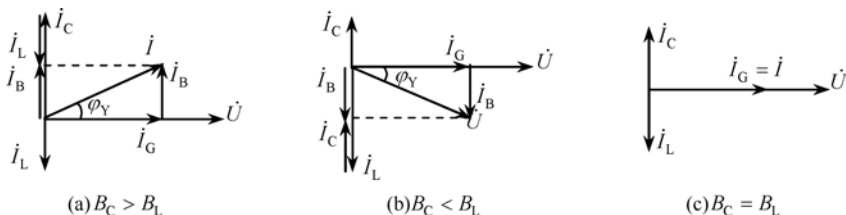


图 4.26 GLC 并联电路的相量图

由图 4.26(a)、(b) 可以看出, \dot{I} 、 \dot{I}_G 、 \dot{I}_B 组成一个直角三角形, 通常称为电流三角形。

例 4.12 GLC 并联电路如图 4.25(a) 所示电路, 已知 $G = 1/15 \text{ S}$, $L = 30 \text{ mH}$, $C = 83.3 \text{ }\mu\text{F}$, $u(t) = 120\sqrt{2} \cos(1000t + 90^\circ) \text{ V}$ 。求并联电路的总电流, 并做相量图。

解: GLC 并联的 Y 参数相量模型如图 4.25(b) 所示, 其中

$$Y_G = \frac{1}{15} = 6.67 \times 10^{-2} \text{ S}$$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{1000 \times 30 \times 10^{-3}} = -j3.33 \times 10^{-2} \text{ S}$$

$$Y_C = j\omega C = j1000 \times 83.3 \times 10^{-6} = j8.33 \times 10^{-2} \text{ S}$$

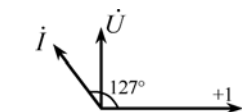


图 4.27 例题 4.12 相量图

则

$$Y = Y_G + Y_L + Y_C = (6.67 + j5) \times 10^{-2} \text{ S} = 8.33 \times 10^{-2} \angle 37^\circ \text{ S}$$

$$\dot{I} = Y \dot{U} = (8.33 \times 10^{-2} \angle 37^\circ)(120 \angle 90^\circ) = 10 \angle 127^\circ \text{ A}$$

对应的正弦电流为

$$i(t) = 10\sqrt{2} \cos(1000t + 127^\circ) \text{ A}$$

并联电路的总电压与总电流相量图如图 4.27 所示。

例 4.13 图 4.28(a) 所示电路, 已知 $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $X_L = 50 \Omega$, $X_C = 20 \Omega$, $u(t) = 220\sqrt{2} \cos 314t \text{ V}$ 。求各支路电流和总电流, 并做相量图。

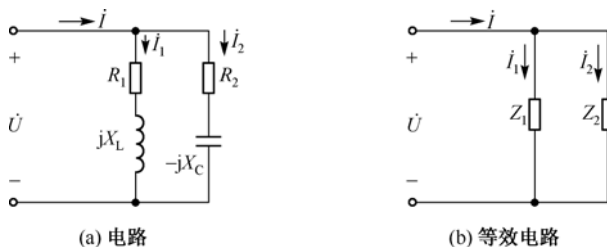


图 4.28 例 4.13 图

解: 图 4.28(a) 的等效电路如图 4.28(b) 所示, 图中

$$\dot{U} = 220\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$Z_1 = R_1 + jX_L = 20 + j50 \approx 53.86\angle 68.2^\circ \Omega$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1 + jX_L} = \frac{1}{53.86\angle 68.2^\circ} \approx 0.0186\angle -68.2^\circ \text{ S}$$

$$Z_2 = R_2 - jX_C = 10 - j20 \approx 22.36\angle -63.4^\circ \Omega$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{1}{22.36\angle -63.4^\circ} = 0.0447\angle 63.4^\circ \text{ S}$$

解法 1: 相量分析法。先求出各支路电流, 再求总电流。

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220\angle 0^\circ}{53.6\angle 68.2^\circ} = 4.1\angle -68.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220\angle 0^\circ}{22.36\angle -63.4^\circ} = 9.9\angle 63.4^\circ \text{ A}$$

或

$$\dot{I}_1 = \dot{U} Y_1 = 220 \times 0.0186\angle -68.2^\circ = 4.1\angle -68.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U} Y_2 = 220 \times 0.0447\angle 63.4^\circ = 9.9\angle 63.4^\circ \text{ A}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4.08\angle -68.2^\circ + 9.84\angle 63.4^\circ \\ &= 1.515 - j3.788 + 4.437 + j8.798 = 5.952 + j5.01 = 7.8\angle 40.2^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

解法 2: 分流公式法。

$$\text{电路总电流} \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{电路等效复阻抗 } Z &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ &= \frac{53.86\angle 68.2^\circ \times 22.36\angle -63.4^\circ}{(20 + j50) + (10 - j20)} \\ &= \frac{1204.3\angle 4.8^\circ}{30 + j30} \\ &= \frac{1204.3\angle 4.8^\circ}{30\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 28.4\angle -40.2^\circ \Omega \end{aligned}$$

所以

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{28.4\angle -40.2^\circ} = 7.8\angle 40.2^\circ \text{ A}$$

支路电流

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{I} = \frac{22.36\angle -63.4^\circ}{30\sqrt{2}\angle 45^\circ} \times 7.8\angle 40.2^\circ = 4.1\angle -68.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{I} = \frac{53.68\angle 68.2^\circ}{30\sqrt{2}\angle 45^\circ} \times 7.8\angle 40.2^\circ = 9.9\angle 63.4^\circ \text{ A}$$

4.5 复杂正弦稳态电路分析举例

由 4.3.3 节的分析可知, 正弦稳态电路的相量模型所依据的两类约束关系的形式与电阻电路所依据的两类约束关系的形式相似, 因而线性电阻电路的各种分析方法和电路定律可推广用于线性电路的正弦稳态分析, 我们在直流电路中介绍的基本定律、公式和分析方法都可以套用到正弦稳态电路分析中, 如等效变换法、复杂电路方程的一般列写方法(支路法、结点法、网孔法、回路法)及运用线性电路定理求解法等。所不同的只是所列电路方程为以相量形式表示的代数方程运用的是以相量形式描述的电路定律, 而计算则为复数运算。

例 4.14 求图 4.29(a) 所示二端网络的等效阻抗 Z_{ab} 。

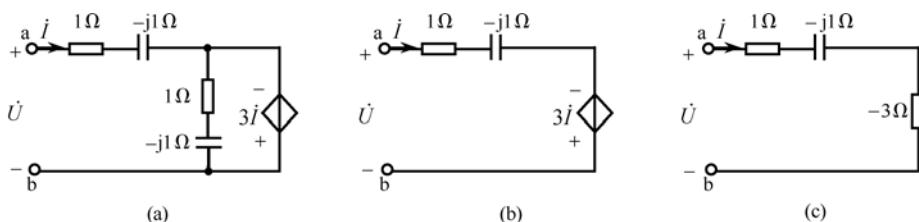


图 4.29 例 4.14 图

解: 解法 1: 用加压求流法。

根据图 4.29(a) 做外围回路的 KVL, 得:

$$\dot{U} = (1 - j1)\dot{I} - 3\dot{I} = (-2 - j1)\dot{I}$$

可得等效阻抗

$$Z_{ab} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = (-2 - j1) \Omega$$

解法 2: 运用等效变换的方法求解。

观察图 4.29(a), $3\angle 0^\circ$ 的受控电压源与阻抗支路 $(1 - j1)\Omega$ 并联, 则该支路对外等效为 $3\angle 0^\circ$ 的受控电压源, 如图 4.29(b) 所示, 进一步可以等效为图 4.29(c) 所示。由图 4.29(c) 可得

$$Z_{ab} = -j1 + 1 - 3 = (-2 - j1) \Omega$$

值得注意的是, 本例中由于受控源的存在, 等效阻抗 Z_{ab} 的实部(即电阻分量)取值为负, 说明电压与电流相位差的绝对值超过 90° 。

例 4.15 在图 4.30 所示正弦交流电路的相量模型中, 已知 $\dot{U}_{S1} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_{S2} = 100 \angle 90^\circ \text{ V}$, $R = 5 \Omega$, $X_L = 5 \Omega$, $X_C = 2 \Omega$ 。用支路电流法计算各支路电流。

解: 支路电流的参考方向已在图中标明。结点 a 的 KCL 方程为

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \quad (1)$$

网孔 A 的 KVL 方程为

$$-jX_C \dot{I}_1 + R \dot{I}_3 - \dot{U}_{S1} = 0 \quad (2)$$

网孔 B 的 KVL 方程为

$$-R \dot{I}_3 + jX_L \dot{I}_2 + \dot{U}_{S2} = 0 \quad (3)$$

解由式(1)、(2)和(3)组成的方程组得

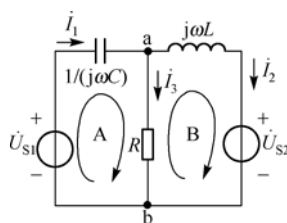


图 4.30 例 4.15 图

$$\dot{I}_1 = 27.8 \angle -56.36^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = 32.4 \angle -115.3^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_3 = 29.9 \angle 11.89^\circ \text{ A}$$

例 4.16 电路如图 4.31(a) 所示, 已知 $\dot{U}_1 = 100 \text{ V}$, $\dot{U}_2 = 100 \angle 53.1^\circ \text{ V}$, 求电流 \dot{I}_C 。

解: 解法 1: 用网孔分析法。

网孔电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 的参考方向如图 4.31(a) 所示, 根据网孔电流方程的列写规律, 得

$$\begin{cases} (5 + j5 - j5)\dot{I}_1 - (-j5)\dot{I}_2 = 100 \angle 0^\circ \\ -(-j5)\dot{I}_1 + (5 - j5 - j5)\dot{I}_2 = -100 \angle 53.1^\circ \end{cases}$$

化简为

$$\begin{cases} 5\dot{I}_1 + j5\dot{I}_2 = 100 \\ j5\dot{I}_1 + (5 - j10)\dot{I}_2 = -60 - j80 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + j\dot{I}_2 = 20 \\ j\dot{I}_1 + (1 - j2)\dot{I}_2 = -12 - j16 \end{cases}$$

利用行列式求解, 可得

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & j \\ -12 - j16 & 1 - j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 - j2 \end{vmatrix}} = \frac{2 - j14}{1 - j} \text{ A} \\ \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ j & -12 - j16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & j \\ j & 1 - j2 \end{vmatrix}} = \frac{-6 - j18}{1 - j} \text{ A} \end{cases}$$

则

$$\dot{I}_C = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \frac{8 + j4}{1 - j} = 6.325 \angle 71.6^\circ \text{ A}$$

解法 2: 用节点分析法。

电路的电位参考零点选择如图 4.31(b) 所示, 根据节点电压方程的列写规律, 得

$$\left(\frac{1}{5 + j5} + \frac{1}{-j5} + \frac{1}{5 - j5} \right) \dot{U}_a = \frac{\dot{U}_1}{5 + j5} + \frac{\dot{U}_2}{5 - j5}$$

即

$$(0.1 - j0.1 + j0.2 + 0.1 + j0.1)\dot{U}_a = \frac{100}{5 + j5} + \frac{60 + j80}{5 - j5}$$

解得

$$\dot{U}_a = (30 - j10) \text{ V}$$

则

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_a}{-j5} = \frac{30 - j10}{-j5} = 2 + j6 = 6.325 \angle 71.6^\circ \text{ A}$$

例 4.17 在图 4.32(a) 所示正弦交流电路中, 已知 $\dot{U}_S = 100 \angle 45^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_S = 4 \angle 0^\circ \text{ A}$, $Z_1 = Z_3 = 50 \angle 30^\circ \Omega$, $Z_2 = 50 \angle -30^\circ \Omega$ 。用叠加定理计算电路中的电流 \dot{I}_2 。

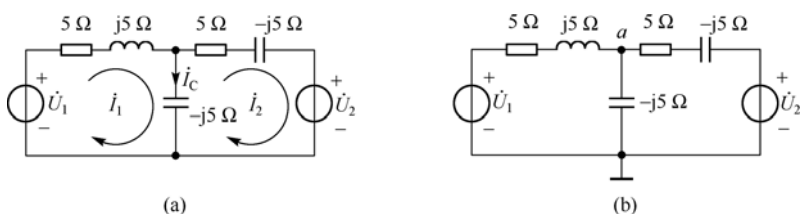


图 4.31 例 4.16 图

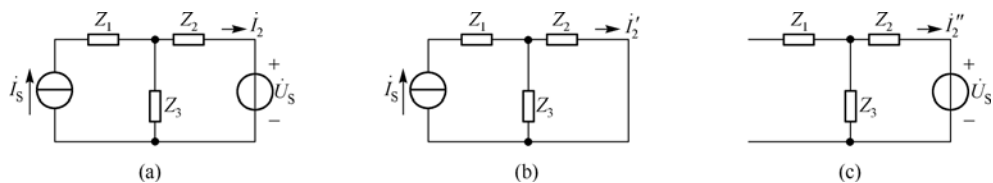


图 4.32 例 4.17 图

解：电流源 \dot{I}_S 独立作用的电路如图 4.32 (b) 所示，由图得

$$\dot{I}_2' = \dot{I}_S \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = 4 \angle 0^\circ \times \frac{50 \angle 30^\circ}{50 \angle -30^\circ + 50 \angle 30^\circ} = \frac{200 \angle 30^\circ}{50\sqrt{3}} = 2.31 \angle 30^\circ \text{ A}$$

电压源 \dot{U}_S 独立作用的电路如图 4.32 (c) 所示，由图得

$$\dot{I}_2'' = -\frac{\dot{U}_S}{Z_2 + Z_3} = \frac{-100 \angle 45^\circ}{50\sqrt{3}} = 1.155 \angle -135^\circ \text{ A}$$

根据叠加定理，所求电流 \dot{I}_2 为

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2'' = 2.31 \angle 30^\circ + 1.155 \angle -135^\circ = 1.23 \angle -15.9^\circ \text{ A}$$

例 4.18 在图 4.33 (a) 所示正弦交流电路中，已知 $\dot{U}_S = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$ ，试用戴维南定理求电流相量 \dot{I} 。

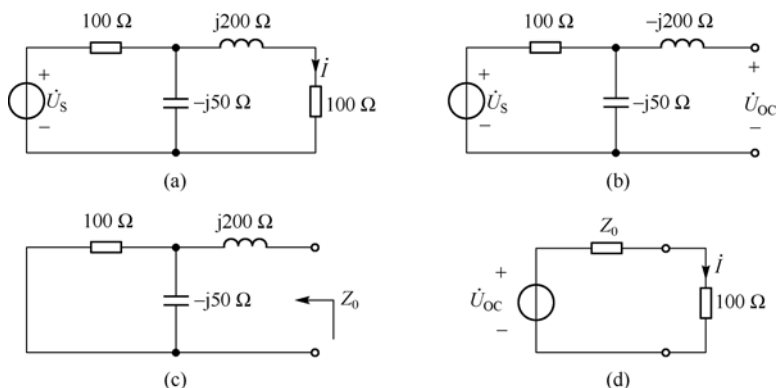


图 4.33 例 4.18 图

解：(1) 求开路电压 \dot{U}_{OC} 。在图 4.33 (b) 中有

$$\dot{U}_{OC} = \frac{-j50}{100 - j50} \times 10 \angle 0^\circ = 4.47 \angle -63.4^\circ \text{ V}$$

(2) 求等效阻抗 Z_0 。在图 4.33 (c) 中有

$$Z_0 = j200 + \frac{100 \times (-j50)}{100 - j50} = (20 + j160) \Omega$$

(3) 根据(1)、(2)可得等效电路如图 4.33(c)所示, 则

$$\underline{I} = \frac{4.47 \angle -63.4^\circ}{20 + j160 + 100} = 0.0224 \angle -116.53^\circ \text{ A}$$

4.6 正弦交流电路的功率

4.6.1 无源二端元件的功率

对于任意一个二端元件, 它在任一时刻 t 所吸收的瞬时功率等于该时刻元件两端的电压与电流的乘积, 记做 p 。关联参考方向下的表达式为

$$p = ui$$

在时间间隔 t_0 到 t_1 内, 元件所吸收的能量为

$$\int_{\omega(t_0)}^{\omega(t_1)} d\omega = \omega(t_1) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} u(t)i(t)dt \quad (4.51)$$

1. 电阻元件的功率

在正弦稳态电路中, 设电阻元件两端的电压为

$$u_R(t) = \sqrt{2}U_R \cos \omega t$$

流过的电流为

$$i_R(t) = \sqrt{2}I_R \cos \omega t$$

在关联参考方向下, 瞬时吸收功率为

$$p_R(t) = u_R(t)i_R(t) = 2U_R I_R \cos^2 \omega t = U_R I_R (1 + \cos 2\omega t) \quad (4.52)$$

由于 $|\cos 2\omega t| \leq 1$, 因此

$$p_R(t) = U_R I_R (1 + \cos 2\omega t) \geq 0$$

电阻元件瞬时功率的波形如图 4.34 所示。由式 (4.52) 及图 4.34 可看出, 电阻元件瞬时功率随时间也按正弦规律变化, 其频率是电压(或电流)频率的 2 倍, 且 $p_R(t) \geq 0$, 瞬时功率非负反映了电阻元件是耗能元件, 在任何时刻电阻元件都表现为吸收而消耗功率的特性。

讨论瞬时功率的意义不大, 常用平均功率表示一个元件或二端网络在一个周期内实际消耗功率的情况。将一个周期内瞬时功率的平均值定义为平均功率, 用 P 表示, 即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

在正弦稳态电路中, 电阻元件的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_R I_R (1 + \cos 2\omega t) dt = U_R I_R = I_R^2 R = \frac{U_R^2}{R} \quad (4.53)$$

式 (4.53) 表明, 电阻元件吸收的平均功率 P 为电压有效值与电流有效值的乘积, 与直流电路中计算功率的公式具有相同的形式。由于平均功率是电阻元件实际消耗的功率, 所以工程技术上又称为有功功率, 简称功率。功率的单位为瓦(W)、千瓦(kW)、兆瓦(MW)和毫瓦(mW)等。例如, 额定功率为 100 W 的白炽灯, 就是指在额定工作时白炽灯消耗的平均功率是 100 W。

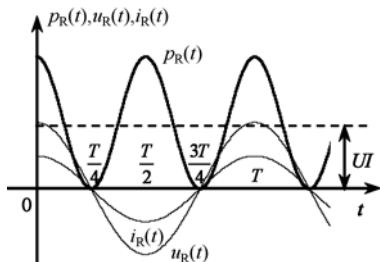


图 4.34 电阻元件的瞬时功率

2. 电感元件的功率

在正弦稳态电路中, 设电感元件两端的电压为

$$u_L(t) = \sqrt{2}U_L \cos \omega t$$

流过的电流为

$$i_L(t) = \sqrt{2}I_L \cos(\omega t - 90^\circ)$$

在关联参考方向下, 瞬时吸收功率为

$$p_L(t) = u_L(t)i_L(t) = 2U_L I_L \cos \omega t \cos(\omega t - 90^\circ) = U_L I_L \sin 2\omega t \quad (4.54)$$

式(4.54)表明电感元件吸收的瞬时功率 $p_L(t)$ 为以两倍的电压(或电流)频率变化的正弦量, 且 $p_L(t)$ 可正可负。瞬时功率为正时, 电感元件获得能量, 此时电感元件吸收电能并转化为磁场能量而储存; 瞬时功率为负时, 电感元件放出能量, 此时电感元件将原先储存的磁能释放。电感元件瞬时功率的波形如图4.35所示。

电感元件吸收的瞬时功率在一个周期的平均值为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_L I_L \sin 2\omega t dt = 0$$

(4.55)

式(4.55)表明电感元件是不消耗电能的。在电流变化的一个周期内, 电感从电源吸收的电能与反送给电源的电能相等, 所以在电感元件的正弦交流电路中没有能量的消耗, 只有电感元件与电源之间的能量交换。显然这是一个可逆的能量转换过程。

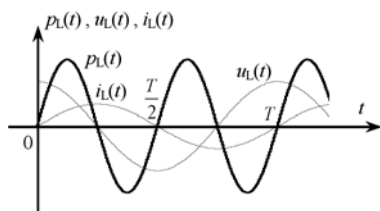


图 4.35 电感元件的瞬时功率

为了衡量电感元件在与外电路进行能量交换过程中能量交换速率的最大程度, 定义其瞬时功率的最大值为无功功率, 用 Q 表示。由式(4.54)可知电感元件的无功功率为

$$Q_L = U_L I_L = I_L^2 X_L = \frac{U_L^2}{X_L} \quad (4.56)$$

为了与有功功率的单位相区别, 无功功率的单位为乏(var)、千乏(kvar)等。

无功功率在工程上有极为重要的意义, 例如电动机和变压器都是感性设备, 没有磁场就无法工作, 所以需要不断地从电源获取一定的无功功率, 才能转化为磁能。无功是指“交换而不消耗”, 而绝非“无用”, 这点与电阻元件对有功功率的吸收而消耗意义不同。

电感元件在一个周期内的平均储能为

$$\begin{aligned} W_L &= \frac{1}{T} \int_0^T w_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} L i_L^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} L [\sqrt{2} I_L \cos(\omega t - 90^\circ)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} L I_L^2 [1 - \cos 2\omega t] dt \\ &= \frac{1}{2} L I_L^2 \end{aligned}$$

电感是一个可以储存磁场能量的储能元件, 正弦稳态电路中一个周期内的平均储能计算公式与电感元件的瞬时储能计算公式形式相同。

根据 $U_L = \omega L I_L$, 可得

$$Q_L = U_L I_L = \omega L I_L^2 = 2\omega W_L \quad (4.57)$$

式(4.57)表明电感元件的无功功率等于其磁场平均储能的 2ω 倍。

3. 电容元件的功率

在正弦稳态电路中, 设电容元件两端的电压为

$$u_C(t) = \sqrt{2}U_C \cos \omega t$$

流过的电流为

$$i_C(t) = \sqrt{2}I_C \cos(\omega t + 90^\circ)$$

在关联参考方向下, 瞬时吸收功率为

$$p_L(t) = u_C(t)i_C(t) = 2U_C I_C \cos \omega t \cos(\omega t + 90^\circ) = -U_C I_C \sin 2\omega t \quad (4.58)$$

式(4.58)表明电容元件吸收的瞬时功率 $p_C(t)$ 为以两倍的电压(或电流)频率变化的正弦量, 且 $p_C(t)$ 可正可负。瞬时功率为正时, 电容元件获得能量, 此时电容元件吸收电能并转化为电场能量而储存; 瞬时功率为负时, 电容元件放出能量, 此时电容元件将原先储存的电场能量释放。电容元件瞬时功率的波形如图4.36所示。

电容元件吸收的瞬时功率在一个周期的平均值为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = -\frac{1}{T} \int_0^T U_C I_C \sin 2\omega t dt = 0 \quad (4.59)$$

式(4.59)表明: 电容元件是不消耗电能的。在电流变化的一个周期内, 电容从电源吸收的电能与反送给电源的电能相等, 所以在电容元件的正弦交流电路中没有能量的消耗, 只有电容元件与电源之间的能量交换。显然这是一个可逆的能量转换过程。

对比电感元件无功功率的定义, 可定义电容元件的无功功率为

$$Q_C = -U_C I_C = I_C^2 X_C = \frac{U_C^2}{X_C} \quad (4.60)$$

对比式(4.56)及式(4.60)可知, 电容元件的无功功率相比电感元件的无功功率差一个负号。当电容与电感接于同一交流电源上时, 二者的功率流向是相反的, 即当电感从电源吸收功率时, 电容刚好向电源发出功率, 这一符号的差异表明了电感元件与电容元件在同一电源作用下相反的功率流向特征。

同理, 电容元件在一个周期内的平均储能为

$$\begin{aligned} W_C &= \frac{1}{T} \int_0^T w_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C u_C^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C [\sqrt{2} U_C \cos \omega t]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} C U_C^2 [1 + \cos 2\omega t] dt \\ &= \frac{1}{2} C U_C^2 \end{aligned}$$

电容是一个可以储存电场能量的储能元件, 正弦稳态电路中一个周期内的平均储能计算公式与电容元件的瞬时储能计算公式形式相同。

根据 $I_C = \omega C U_C$, 可得

$$Q_C = -U_C I_C = -\omega C U_C^2 = -2\omega W_C \quad (4.61)$$

式(4.61)表明电感元件的无功功率为负, 数值上等于其电场平均储能的 2ω 倍。

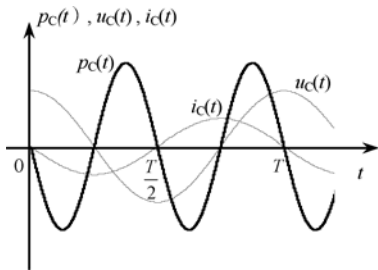


图4.36 电容元件的瞬时功率

4.6.2 二端网络的功率

正弦稳态电路中, 无源二端网络如图4.37(a)所示, 设其端口电压、电流在关联参考方向下的表达式为

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

则网络 N 的瞬时吸收功率

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \end{aligned} \quad (4.62)$$

式(4.62)中, $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ 是无源二端网络端口电压与电流的相位差, 也是该二端网络的阻抗角。式(4.62)表明无源二端网络 N 的瞬时功率可以看成是两个分量叠加的结果, 其一为恒定分量; 另一为正弦分量, 其频率是电压(或电流)频率的两倍。

图4.37(b)是二端网络 N 的瞬时功率随时间变化的曲线。由于电压与电流不同相, 瞬时功率时正时负。当瞬时功率为正时, 二端网络 N 从外电路吸收能量; 当瞬时功率为负时, 二端网络向外释放能量。于是, 在二端网络和外电路之间形成了能量的往返交换的现象。由于二端网络是由电阻、电感、电容等无源元件构成的, 电感和电容是储能元件, 所以二端网络与外电路之间就存在能量往返; 同时由于网络 N 存在电阻元件, 因此网络 N 总体上要耗能, 即一个周期中 $p(t) > 0$ 的曲线下的面积大于 $p(t) < 0$ 的曲线下的面积。

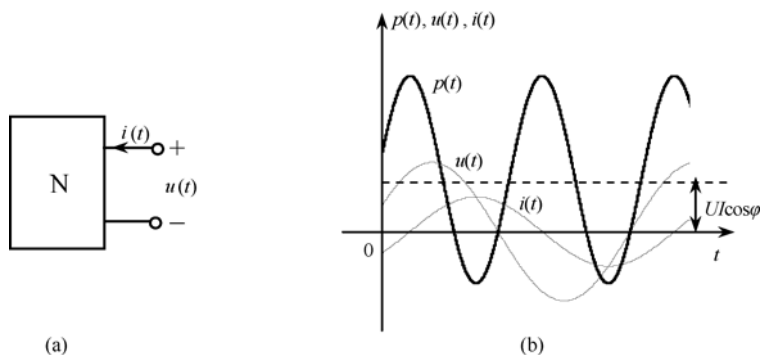


图 4.37 二端网络的瞬时功率

进一步将式(4.60)写为

$$\begin{aligned} p(t) &= UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI \cos[2(\omega t + \varphi_u) - (\varphi_u - \varphi_i)] \\ &= UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) + UI [\cos 2(\omega t + \varphi_u) \cos(\varphi_u - \varphi_i) + \sin 2(\omega t + \varphi_u) \sin(\varphi_u - \varphi_i)] \\ &= UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)] + UI \sin(\varphi_u - \varphi_i) \sin 2(\omega t + \varphi_u) \\ &= UI \cos \varphi [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)] + UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \varphi_u) \end{aligned} \quad (4.63)$$

式(4.63)表明, 瞬时功率也可以看成是另两个分量的叠加。其中, 一个分量 $UI \cos \varphi [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_u)]$ 是以 $UI \cos \varphi$ 为平均值的振荡分量, 对于不含受控源的无源二端网络, 其等效阻抗的电阻分量 $R \geq 0$, 阻抗角 $|\varphi| \leq 90^\circ$, $\cos \varphi \geq 0$, 因此这一项功率分量的瞬时值非负, 这与电阻元件吸收的瞬时功率的函数式形式相同, 见式(4.52), 它代表电路的等效电阻所吸收的瞬时功率, 是反映电路实际耗能速率的有功分量, 称其为二端网络瞬时功率的电阻分量, 其平均值 P 即为二端网络的平均功率, 即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi \quad (4.64)$$

式(4.64)表明,二端网络的平均功率不仅与端口电压和电流有效值的乘积有关,还取决于 $\cos \varphi$,定义 $\cos \varphi$ 为二端网络的功率因数, φ 称为功率因数角。功率因数一般用 λ 表示,即

$$\lambda = \cos \varphi \quad (4.65)$$

为体现网络的性质,习惯上当二端网络的电流超前于电压时,在 λ 后标注“超前”,表明二端网络呈电容性;当二端网络的电流滞后于电压时,在 λ 后标注“滞后”,表明二端网络呈电感性。

根据二端网络的性质及功率因数角的取值不同,二端网络的平均功率取值有以下几种特殊情况:

- (1) 当二端网络等效为纯电阻时, $\varphi = 0$,功率因数 $\lambda = 1$,此时二端网络的平均功率达到最大,即 $P = UI$,二端网络只从外电路吸收能量而没有能量往返。
- (2) 当二端网络等效为纯电抗时, $|\varphi| = 90^\circ$,功率因数 $\lambda = 0$,此时二端网络的平均功率数值最小,即 $P = 0$,二端网络不消耗能量而只是与外电路不断地进行能量往返的交换。
- (3) 当二端网络不含受控源,而仅由无源元件(电阻、电感和电容)组成时, $|\varphi| \leq 90^\circ$,二端网络等效阻抗的电阻分量 $R \geq 0$,二端网络的平均功率介于0与最大取值 UI 之间,即 $0 \leq P \leq UI$,二端网络总体上表现为吸收而消耗能量。
- (4) 如果二端网络内除无源元件外还含有受控源时,功率因数角 φ 就有可能大于 90° ,此时,平均功率将为负值,说明该网络向外电路释放能量。

此外,根据功率守恒法则,二端网络所吸收的总瞬时功率应为各元件吸收的瞬时功率的总和。即

$$p = \sum p_k \quad (4.66)$$

式(4.66)中, p_k 为第 k 个元件的瞬时功率,对式(4.62)两端取平均值,可得

$$P = \sum P_k \quad (4.67)$$

式(4.67)中, P_k 为第 k 个元件的平均功率。由于电感元件和电容元件的平均功率为0,因此无源二端网络的总平均功率等于网络内部各电阻消耗的平均功率的总和。

式(4.63)中的另一个分量 $UI \sin \varphi \sin 2(\omega t + \varphi_0)$ 是一个正弦交变的瞬时功率分量,这一项功率分量时正时负,且其正、负半周的功率曲线对称,这与电感和电容元件的瞬时功率的函数式形式相同,见式(4.54)及式(4.58)。这个瞬时功率分量代表电路的等效电抗吸收的瞬时功率,它反映了二端网络和外电路之间能量往返交换的速率,是在平均意义上不能做功的无功分量,称其为二端网络瞬时功率的电抗分量,同样,把这一项瞬时功率分量中的最大值(能量交换的最大速率) Q 定义为二端网络的无功功率,即有

$$Q = UI \sin \varphi \quad (4.68)$$

根据二端网络的性质及功率因数角的取值不同,二端网络的无功功率取值有以下几种情况:

- (1) 当网络等效为纯电阻时, $\varphi = 0$, $Q = 0$,此时二端网络与外电路没有能量交换,但是其内部仍然存在电感和电容之间的能量交换。
- (2) 当网络呈现电感性时, $\varphi > 0$, $Q > 0$,此时二端网络与外电路有能量往返,且在 $\varphi = 90^\circ$ 时,能量往返的速率达到最大,即 $Q = UI$ 。
- (3) 当网络呈现电容性时, $\varphi < 0$, $Q < 0$,此时二端网络与外电路有能量往返,且在 $\varphi = -90^\circ$ 时,能量往返的速率达到最大,即 $Q = -UI$ 。

对于任何无源二端网络,可以证明

$$Q = 2\omega(W_L - W_C) \quad (4.69)$$

式(4.69)中, W_L 为网络中总的磁场储能平均值, W_C 为网络中总的电场储能平均值。因此无源二端网络的总无功功率等于网络磁场平均储能与电场平均储能差值的 2ω 倍。根据这个关系不难得到, 二端网络的总无功功率满足

$$Q = \sum Q_k \quad (4.70)$$

式(4.70)中, Q_k 为第 k 个元件的无功功率。由于电阻元件的无功功率为 0, 因此无源二端网络的总无功功率等于网络内部各电感及电容无功功率的总和。

电工技术中, 通常把二端网络的端口电压有效值与电流有效值的乘积定义为视在功率, 用 S 表示, 即

$$S = UI \quad (4.71)$$

它具有功率的量纲, 但又不是二端网络所消耗的功率。为了区别平均功率, 视在功率的单位取为伏安(VA)、千伏安(kVA)等。视在功率通常用于表示电气设备的容量, 即消耗功率的最大值。通常, 电动机的额定电压和额定电流都指有效值, 它们的乘积为视在功率。电工技术中把它定义为电动机的额定功率, 用电超过额定值, 电动机就可能损坏。

比较式(4.64)、式(4.68)和式(4.71)可知

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (4.72)$$

且

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \cos \varphi \quad (4.73)$$

可以看出, 有功功率 P 、无功功率 Q 及视在功率 S 形成一个直角三角形, 称为功率三角形。阻抗三角形、电压三角形和功率三角形互为相似三角形, 如图 4.38 所示。

值得注意的是, 二端网络的视在功率

$$S \neq \sum S_k$$

上式中的 S_k 为网络内第 k 个元件的视在功率。即视在功率不守恒,

二端网络总的视在功率不等于网络中各元件视在功率的总和。

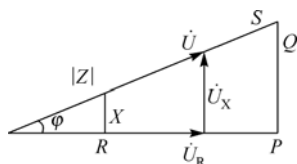


图 4.38 阻抗、电压和功率三角形

例 4.19 在图 4.39(a) 所示正弦稳态电路中, $i_s(t) = 5\sqrt{2} \cos 2t$ A, 试求电源提供的 P 、 Q , 并计算 S 、 λ 。

解: 电路的相量模型如图 4.39(b) 所示, 对电源而言的二端网络等效阻抗为

$$Z = 2 + \frac{(1 + j1)(2 - j1)}{1 + j1 + 2 - j1} = 2 + \frac{3 + j}{3} = \left(3 + j\frac{1}{3}\right) \Omega$$

二端网络端口电压相量为

$$\dot{U} = Z \dot{I}_s = \left(3 + j\frac{1}{3}\right) \cdot 5 \angle 0^\circ = 15.1 \angle 6.34^\circ \text{ V}$$

因此

$$P = UI \cos \varphi = 15.1 \times 5 \times \cos 6.34^\circ = 75 \text{ W}$$

$$Q = UI \sin \varphi = 15.1 \times 5 \times \sin 6.34^\circ = 8.3 \text{ var}$$

$$S = UI = 15.1 \times 5 = 75.5 \text{ VA}$$

$$\lambda = \cos \varphi = \cos 6.34^\circ = 0.994 \text{ (滞后)}$$

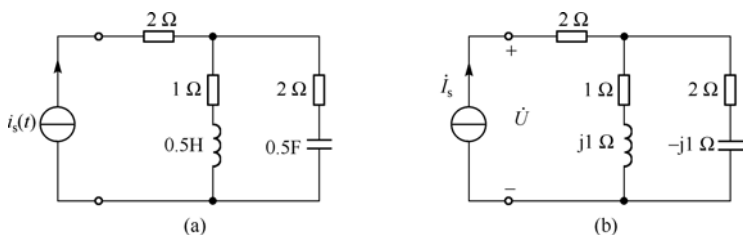


图 4.39 例 4.19 图

4.6.3 复功率

正弦稳态电路中的各种功率计算也可以运用相量法直接得到。在关联参考方向下, 无源二端网络的端口电压相量和电流相量分别为

$$\underline{U} = U \angle \varphi_u$$

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i$$

且

$$\underline{I}^* = I \angle -\varphi_i$$

为电流相量的共轭复数, 则定义二端网络的复功率为

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = U \angle \varphi_u \cdot I \angle -\varphi_i = UI \angle \varphi_u - \varphi_i = UI \angle \varphi \\ &= UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ = S \angle \varphi \end{aligned} \quad (4.74)$$

由式(4.74)可见, 复功率 \underline{S} 是以平均功率为实部, 无功功率为虚部, 视在功率为模, 功率因数角为幅角的复数, 其单位与视在功率的单位相同, 也是伏安(VA)。对于无源二端网络, 复功率的实部 P 为网络中电阻元件消耗功率的总和, 虚部 Q 为网络中元件无功功率的代数和, 因此有

$$\underline{S} = P + jQ = \sum P_k + j \sum Q_k = \sum \underline{S}_k \quad (4.75)$$

由式(4.75)可见, 视在功率虽然不守恒, 但复功率是守恒的。

例 4.20 已知关联参考方向下无源二端网络的端口电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 分别为

(1) $u(t) = 20\cos 314t$ V, $i(t) = 0.3\cos 314t$ A;

(2) $u(t) = 10\cos(100t + 70^\circ)$ V, $i(t) = 2\cos(100t + 40^\circ)$ A;

(3) $u(t) = 10\cos(100t + 20^\circ)$ V, $i(t) = 2\cos(100t + 50^\circ)$ A;

求各种情况下的 P 、 Q 、 S 、 λ 。

解: (1) 根据已知条件可得端口电压及电流相量分别为

$$\underline{U} = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \underline{I} = \frac{0.3}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ A}$$

因此

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \cdot \frac{0.3}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 3 \angle 0^\circ = 3 \text{ VA}$$

相应地

$$P = \operatorname{Re}[\underline{S}] = 3 \text{ W}$$

$$Q = \operatorname{Im}[\underline{S}] = 0 \text{ var}$$

$$S = |\underline{S}| = 3 \text{ VA}$$

$$\lambda = \cos \varphi = \cos 0^\circ = 1$$

网络呈现电阻性。

(2) 根据已知条件可得端口电压及电流相量分别为

$$\dot{U} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 70^\circ \text{ V}, \quad \dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 40^\circ \text{ A}$$

因此

$$S = \dot{U} \dot{I}^* = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 70^\circ \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \angle -40^\circ = 10 \angle 30^\circ = (8.66 + j5) \text{ VA}$$

相应地有

$$P = \operatorname{Re}[S] = 8.66 \text{ W}$$

$$Q = \operatorname{Im}[S] = 5 \text{ var}$$

$$S = |S| = 10 \text{ VA}$$

$$\lambda = \cos \varphi = \cos 30^\circ = 0.866 (\text{滞后})$$

网络呈现电感性。

(3) 根据已知条件可得端口电压及电流相量分别为

$$\dot{U} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 20^\circ \text{ V}, \quad \dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 50^\circ \text{ A}$$

因此

$$S = \dot{U} \dot{I}^* = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 20^\circ \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ = 10 \angle -30^\circ = (8.66 - j5) \text{ VA}$$

相应地有

$$P = \operatorname{Re}[S] = 8.66 \text{ W}$$

$$Q = \operatorname{Im}[S] = -5 \text{ var}$$

$$S = |S| = 10 \text{ VA}$$

$$\lambda = \cos \varphi = \cos(-30^\circ) = 0.866 (\text{超前})$$

网络呈现电容性。

4.6.4 功率因数的提高

1. 提高功率因数的必要性

通过 4.6.2 节的讨论可知, 在正弦稳态电路中, 二端网络的有功功率不仅取决于端口电压电流的有效值, 还取决于功率因数, 即

$$P = UI \cos \varphi$$

当功率因数不等于 1 时, 电路中就发生能量交换, 出现无功功率。这样就会出现下面两个问题:

(1) 发电设备的容量不能充分利用。在功率因数 $\lambda < 1$ 时, 由于发电机的电压和电流不容许超过额定值, 因此发电机所能发出的有功功率减小了, λ 越小, 发电机发出的有功功率越小, 电路中能量无谓往返的规模越大, 发电机发出的能量利用率越低。

例如容量为 1000 kVA 的发电机, 当 $\lambda = 1$ 时, 发出 1000 kVA 的有功功率, 而在 $\lambda = 0.8$ 时, 则只能发出 800 kVA 的功率。

(2) 增加线路和发电机绕组的功率损耗。当发电机的电压 U 和输出的功率 P 一定时, 电流 I 与功率因数成反比, 而线路和发电机绕组上的功率损耗 ΔP 则与 λ 的平方成反比, 即

$$\Delta P = I^2 r = \left(\frac{P^2}{V^2} \right) \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

式中 r 是发电机绕组和线路的电阻。

由此可见,提高电网的功率因数对国民经济的发展是极为必要的。功率因数的提高,能使发电设备的容量得到充分的利用,对挖掘发供电设备的潜力、降低电能损耗、减少用户电费支出等方面意义深远。在现今可用资源接近匮乏的情况下,提高负载的功率因数是最有效地提高电力资源利用率的方式。

2. 提高功率因数的方法

提高电力系统的功率因数可从提高自然功率因数和采用人工补偿两方面考虑。提高自然功率因数是通过降低各种用电设备所需无功功率来改善功率因数的方法。例如,合理选用异步电动机,减少电动机的空载或轻载运行,合理选择电力变压器的容量,采用同步电动机等。在充分考虑提高自然功率因数,而功率因数仍不能达到要求时,需装设人工补偿装置对功率因数进行人工补偿。

对功率因数进行人工补偿的常用方法是给感性负载并联电容,称为并联电容补偿法。

在工业和生活用电负载中,大多数都是感性负载,其电路模型可以由 R 、 L 串联电路组成,为了提高功率因数,在其两端并联了电容器,如图 4.40(a) 所示,图 4.40(b) 是图 4.40(a) 电路的相量图。

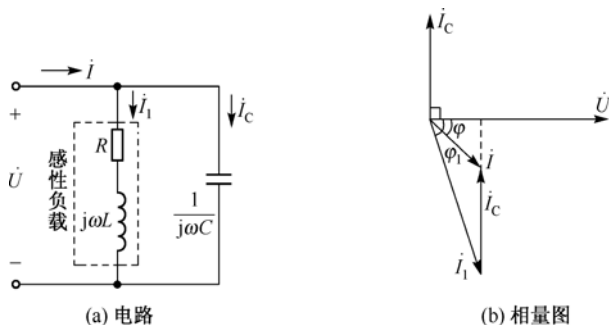


图 4.40 并联电容器提高功率因数

由图 4.40 可以看出,在未并联电容时,电路的总电流 $\dot{I} = \dot{I}_1$, 电压 \dot{U} 与电流 \dot{I} 相位差为 φ_1 ; 并联电容器后,电路总电流 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_C$, 电压 \dot{U} 与总电流 \dot{I} 的相位差为 φ , 显然 $\varphi < \varphi_1$, 所以 $\cos \varphi > \cos \varphi_1$, 即整个电路的功率因数提高了。总电流 I 比 I_1 (未并电容之前的总电流) 也减小了。由于电容不消耗功率, 所以电路的有功功率不变。又因电容与负载并联, 感性负载的端电压及负载参数均未变化, 所以这种补偿对原负载的工作状态也无影响。

从能量的角度来看, 并联电容提高功率因数的实质, 是使部分磁场能量与电场能量在电路内部相互交换, 从而减小了电源和负载之间的能量互换。可见, 提高功率因数的结果减轻了无功电流施加于电源的负担, 使电源能更多地承担有功电流, 以充分利用电源设备的容量。

对于一定的负载 (U 、 P 、 $\cos \varphi_1$ 一定), 若将 $\cos \varphi_1$ 提高到 $\cos \varphi$, 应并联的电容量可由相量图得到。在图 4.40(a) 中

$$I_C = \omega C U \quad (4.76)$$

在图 4.40(b) 中

$$I_C = I_1 \sin \varphi_1 - I \sin \varphi$$

而

$$I_1 = \frac{P}{U \cos \varphi_1}, \quad I = \frac{P}{U \cos \varphi}$$

所以

$$I_C = \frac{P}{U \cos \varphi_1} \sin \varphi_1 - \frac{P}{U \cos \varphi} \sin \varphi = \frac{P}{U} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi) \quad (4.77)$$

比较式(4.76)与式(4.77)得

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi) \quad (4.78)$$

此外,在送电和配电电力线路中也常用电容器串联补偿(即将电容器与线路串联)的方法提高功率因数,以减少线路的电压损失,提高末端电压水平,减少线路的功率损失和电能损失,提高输送能力。

例 4.21 图 4.41 电路中的 R 、 L 串联电路为日光灯电路的模型。将此电路接于 50 Hz 的正弦交流电压源上,测得端电压为 220 V,电流为 0.4 A,功率为 40 W。(1) 求电路吸收的无功功率及功率因数; (2) 求日光灯电路的等效阻抗 Z 、等效电阻 R 与等效电感 L ; (3) 如果要求将功率因数提高到 0.95,应给日光灯并联多大电容量的电容器?

解: (1) 根据

$$P = UI \cos \varphi_1$$

可以求得功率因数

$$\cos \varphi_1 = \frac{P}{UI} = \frac{40}{220 \times 0.4} = 0.4545$$

功率因数角

$$\varphi_1 = \arccos 0.4545 = 62.97^\circ$$

未并联电容时电路吸收的无功功率为

$$Q_1 = UI \sin \varphi_1 = 220 \times 0.4 \times \sin 62.97^\circ \text{ var} = 78.4 \text{ var}$$

(2) 日光灯电路的等效阻抗的模为

$$|Z| = \frac{U}{I_l} = \frac{U}{I} = \frac{220}{0.4} = 550 \Omega$$

等效阻抗的辐角即为功率因数角

$$\varphi_1 = 62.97^\circ$$

故等效阻抗为

$$Z = |Z| e^{j62.97^\circ} = (250 + j490) \Omega$$

等效电阻为

$$R = 250 \Omega$$

等效电抗为

$$X = 490 \Omega$$

等效电感为

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{490}{2\pi \times 50} = 1.56 \text{ H}$$

(3) 并联电容以后的功率因数及功率因数角分别为

$$\cos \varphi = 0.95, \varphi = \arccos 0.95 = 18.2^\circ$$

并联电容的电容量 C 为

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi) = 4.29 \mu\text{F}$$

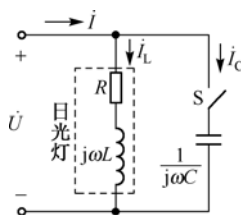


图 4.41 日光灯电路的模型

4.6.5 最大功率传输

在正弦稳态电路中,同样需要研究在什么条件下负载能获得最大功率。如果将一个含源的二端网络用戴维宁定理等效为一个理想电压源 \mathcal{U}_S 与二端网络输入阻抗 Z_S 的串联,而负载的阻抗为 Z_L ,则电源与负载的等效电路如图 4.42 所示。

设 $Z_S = R_S + jX_S$, $Z_L = R_L + jX_L$, 则电路电流为

$$I = \frac{\mathcal{U}_S}{(R_S + R_L) + j(X_S + X_L)}$$

负载吸收的功率为

$$P_L = I^2 R_L = \frac{U_S^2 R_L}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}$$

(1) 当负载的 R_L 、 X_L 任意可调时,负载获得最大功率的条件为

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0, \quad \frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0$$

解得

$$R_L = R_S, \quad X_L = -X_S$$

即当

$$Z_L = R_S - jX_S = \bar{Z}_S \quad (4.79)$$

时,负载可获得最大功率。该最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2}{4R_S} \quad (4.80)$$

这一结论称为最大功率传输定理,在工程技术中,通常把满足式(4.79)的条件,称为负载与含源二端网络之间满足阻抗共轭匹配或最佳匹配,也称最大功率匹配。

(2) 当负载的阻抗角固定不变,而阻抗模可变时,含源二端网络的输入阻抗 Z_S 和负载阻抗 Z_L 可表示为

$$\begin{aligned} Z_S &= |Z_S| \angle \varphi_S = |Z_S| \cos \varphi_S + j |Z_S| \sin \varphi_S \\ Z_L &= |Z_L| \angle \varphi_L = |Z_L| \cos \varphi_L + j |Z_L| \sin \varphi_L \end{aligned}$$

负载吸收的功率为

$$P_L = \frac{U_S^2 R_L}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} = \frac{U_S^2 (|Z_L| \cos \varphi_L)}{(|Z_S| \cos \varphi_S + |Z_L| \cos \varphi_L)^2 + (|Z_S| \sin \varphi_S + |Z_L| \sin \varphi_L)^2}$$

整理可得

$$P_L = \frac{U_S^2 (|Z_L| \cos \varphi_L)}{|Z_S|^2 + |Z_L|^2 + 2|Z_S||Z_L| \cos(\varphi_S - \varphi_L)}$$

上式中变化的是 $|Z_L|$, 负载吸收功率 P_L 对 $|Z_L|$ 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dP_L}{d|Z_L|} &= \frac{U_S^2 \cos \varphi_L [|Z_S|^2 + |Z_L|^2 + 2|Z_S||Z_L| \cos(\varphi_S - \varphi_L)] - 2|Z_L|^2 - 2|Z_S||Z_L| \cos(\varphi_S - \varphi_L)}{[|Z_S|^2 + |Z_L|^2 + 2|Z_S||Z_L| \cos(\varphi_S - \varphi_L)]^2} \\ &= \frac{U_S^2 \cos \varphi_L (|Z_S|^2 - |Z_L|^2)}{[|Z_S|^2 + |Z_L|^2 + 2|Z_S||Z_L| \cos(\varphi_S - \varphi_L)]^2} \end{aligned}$$

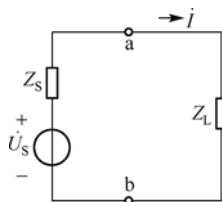


图 4.42 最大功率传输

当满足

$$\frac{dP_L}{d|Z_L|} = 0$$

即

$$|Z_L| = |Z_S|$$

时, 负载获得最大功率。显然, 此时负载获得最大功率的条件是负载阻抗的模与含源二端网络输入阻抗的模相等, 因而称为模匹配。当负载为纯电阻时, 负载电阻获得最大功率的条件是

$$R_L = \sqrt{R_S^2 + X_S^2}$$

在模匹配时, 负载获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2 \cos \varphi_L}{2|Z_S|[1 + \cos(\varphi_S - \varphi_L)]}$$

显然, 模匹配时负载所获得的最大功率小于共轭匹配时负载所获得的最大功率。

例 4.22 图 4.43 所示为某一正弦稳态电路的相量模型。(1) Z_L 为何值时可达共轭匹配, 求出共轭匹配时的最大功率。(2) 如果负载为纯电阻 R_L , 则 R_L 取何值时获得最大功率, 最大功率值为多少?

解: 先对负载左端电路进行戴维南等效, 其开路电压及输入阻抗分别为

$$U_{oc} = 100 \times 2 \angle 0^\circ = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$Z_S = 100 - j100 = 100\sqrt{2} \angle -45^\circ \Omega$$

(1) 当 $Z_L = Z_S^* = 100 + j100 \Omega$ 时, 负载与含源二端网络达到共轭匹配

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_S} = 100 \text{ W}$$

(2) 当 $R_L = |Z_S| = 100\sqrt{2} \Omega$ 时, 负载与含源二端网络达到模匹配

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2 \cos \varphi_L}{2|Z_S|[1 + \cos(\varphi_S - \varphi_L)]} = \frac{200^2 \cos 0^\circ}{2 \times 100\sqrt{2} \times [1 + \cos(-45^\circ)]} = 82.8 \text{ W}$$

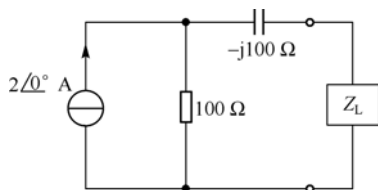


图 4.43 例 4.22 图

4.7 谐振电路

谐振(resonance)是正弦稳态电路在特定条件下所产生的一种特殊物理现象。由电阻、电感、电容构成的交流电路, 当正弦交流电源的频率与谐振电路的固有角频率相等或接近相等时, 电路对外呈现电阻性, 电路的总阻抗达到极值或近似达到极值, 因而在电路中产生很大的电流或电压, 这种现象称为电路发生了谐振。由于谐振电路会产生很大的振荡电流或电压, 在无线电技术和电工技术中, 许多无线电设备几乎都无一例外地采用谐振电路来实现选频、滤波等功能; 而在电力系统中也需要考虑防止谐振的发生, 以免引起过电压、过电流的现象, 造成系统设备的损坏或人身事故的发生。

4.7.1 串联谐振电路

1. 串联谐振电路及谐振条件

由电感、电容、电阻组成的串联谐振电路如图 4.44 所示, 在正弦电压 $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u)$ 的作用下, 电路的等效阻抗随角频率 ω 的变化而变化, 即

$$Z(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

当激励信号的频率使阻抗的电抗分量 $X=0$ 时, 端口上的电压与电流同相, 工程上将电路的这种状态称为电路发生了谐振, 图 4.44 是在 RLC 串联电路中产生的谐振, 因此称为串联谐振。根据产生谐振的一般条件 $X=0$, 可得

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

发生谐振时的角频率 ω_0 和频率 f_0 分别为:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.81)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.82)$$

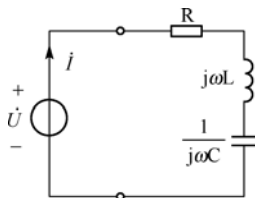


图 4.44 RLC 串联谐振电路

由式(4.81)和式(4.82)可以看出, 谐振角频率和谐振频率只与串联电路中固有的参数 L 、 C 有关, 因此 ω_0 和 f_0 也分别称为电路的固有角频率和固有频率。当频率一定时, 可以通过改变电路中的电感和电容使电路发生谐振, 这一过程称作调谐。在收音机电路中, 就是通过改变输入电路的电容使电路与某一电台的频率接近, 达到选择电台的接收信号的目的。

例 4.23 已知某一收音机的中波段输入电路可等效为图 4.44 所示的串联电路, $L=300\ \mu\text{H}$, 若接收频率范围是从 525 kHz 至 1605 kHz, 试求 C 的变化为多少才能覆盖上述频率范围。

解: 串联谐振电路的谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

因此

$$C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L}$$

当接收 525 kHz 的信号时,

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi \times 525 \times 10^3)^2 \times 300 \times 10^{-6}} = 3.06 \times 10^{-10}\ \text{F}$$

当接收 1605 kHz 的信号时,

$$C_2 = \frac{1}{(2\pi \times 1605 \times 10^3)^2 \times 300 \times 10^{-6}} = 3.27 \times 10^{-11}\ \text{F}$$

即 C 的变化范围为 $3.06 \times 10^{-10}\ \text{F}$ 至 $3.27 \times 10^{-11}\ \text{F}$ 。

2. 串联谐振电路的特点

如图 4.44 所示的串联谐振电路, 电路中的电流相量为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (4.83)$$

由式(4.83)可知, 当电路产生谐振时, 有如下特点:

- (1) 阻抗最小, 且电路呈现纯电阻性。
- (2) 电路中的电流最大, 电压与电流同相, 此时电流有效值由下式决定

$$I = I_0 = \frac{U}{R} \quad (4.84)$$

(3) 电路中感抗和容抗相等, 通常将谐振时的感抗和容抗定义为谐振电路的特性阻抗, 用 ρ 表示, 即

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.85)$$

由式(4.85)可知, 特性阻抗 ρ 具有电阻的量纲, 它取决于电路元件参数 L 、 C 的大小, 与信号的频率无关, 是一个反映谐振电路特性的二次参数。在工程中, 通常把特性阻抗与电路的电阻阻值的比值定义为谐振电路的品质因数, 用 Q 表示, 即

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.86)$$

式(4.86)表明, 品质因数 Q 是一个无量纲的系数, 其数值只取决于谐振电路元件参数 R 、 L 、 C 的大小, 与信号的频率无关, 也是一个反映谐振电路特性的二次参数。

(4) 谐振时, 电感和电容两端的电压相等, 相位相反, 大小为端电压的 Q 倍。电阻、电感、电容元件两端的电压分别为

$$\begin{cases} U_R = R I_0 = U \\ U_L = j \omega_0 L I_0 = j \frac{\omega_0 L}{R} U = j Q U \\ U_C = -j \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = -j \frac{1}{\omega_0 C R} U = -j Q U \end{cases} \quad (4.87)$$

通常电路在谐振状态下, 感抗和容抗要比电路中的电阻大得多, Q 值可达几十甚至上百倍, 因此串联谐振电路发生谐振时, 电抗性元件上的电压可远远高于端口电压 U , 故串联谐振也称做电压谐振。在电子技术中, 常利用这个特点来实现微弱信号的选择放大。当然, 在不需要利用谐振的场合, 也要尽量避免和抑制这种情况发生, 以免元件的过压损坏。

3. 串联谐振电路的选频特性

对于图 4.44 所示的串联谐振电路, 电路中的电流相量为

$$I = \frac{U}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{U/R}{1 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)/R} = \frac{I_0}{1 + j \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{I_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

对应任意频率下的电流有效值与谐振时电流有效值的比值为

$$\frac{I}{I_0} = \frac{|Y(\omega)|}{|Y_0(\omega_0)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (4.88)$$

任意频率下电流与谐振时电流的相位差为

$$\varphi(\omega) = -\arctan Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (4.89)$$

显然, 当电源的频率变化时, 串联谐振电路中的电流和各元件上的电压、电路中的阻抗(或导纳)、阻抗角(或导纳角)等都将随频率的变化而变化, 这种随频率变化而变化的关系称为频率特性。习惯上, 将谐振电路中的电流(或电压)随频率变化的曲线称为谐振曲线, 包括幅频特性曲线和相频特性曲线。

串联谐振曲线是指串联谐振回路的电流的频率特性曲线,图4.45(a)、(b)分别是不同品质因数下串联谐振电路的幅频特性和相频特性曲线。

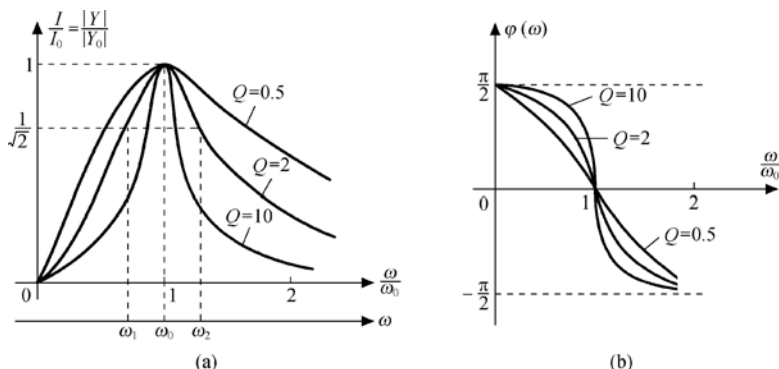


图 4.45 串联谐振电路的谐振曲线

由幅频特性曲线可以看到,当 $\omega = \omega_0$ 时,串联谐振电路中的电流最大,数值为 I_0 ,而当 ω 偏离 ω_0 时,串联谐振电路中的电流就下降,下降的速率与电路的品质因数 Q 有关, Q 值越大,曲线越尖锐,电路中的电流衰减得越快。这说明谐振电路只有在谐振频率点附近的频域才有较大的输出电流,而对偏离谐振频率的信号有较强的抑制能力,电路的这种性能称为选择性。 Q 值越高,对信号的选择性也越好。

工程上,为了定量地衡量谐振电路的选择性,通常规定串联谐振电路中的电流衰减到谐振时电流的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍时的这段频率范围称为串联谐振电路的通频带,用BW表示。

在通频带内, ω 与 ω_0 十分接近,于是

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = Q \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega\omega_0} \approx Q \frac{2\omega(\omega - \omega_0)}{\omega\omega_0} = Q \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0} = Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = Q \frac{2\Delta f}{f_0}$$

式(4.88)可以简化为

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(Q \frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2}}$$

当

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

时,有

$$Q \frac{2\Delta f}{f_0} = 1$$

所以串联谐振电路的通频带宽为

$$\text{BW} = 2\Delta f = \frac{f_0}{Q} \quad (4.90)$$

式(4.90)表明,通频带BW与品质因数 Q 成反比, Q 值越高,谐振曲线越尖锐,通频带就越窄。通频带窄,会使有用信号在高频和低频区产生明显失真,因此提高电路的选择性和保证信号有较宽的频带是相互矛盾的。在工程实际中,应在保证信号失真低于允许值的条件下,尽可能提高电路的选择性。

4.7.2 并联谐振电路

1. 并联谐振电路及谐振条件

由电感、电容、电阻组成的并联谐振电路如图4.46所示，在正弦电流 $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i)$ 的作用下，电路的等效导纳随角频率 ω 的变化而变化，即

$$Y(j\omega) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB$$

当激励信号的频率使阻抗的电纳分量 $B=0$ 时，端口上的电压与电流同相，电路发生并联谐振。同理，根据

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

可以得到发生并联谐振时的角频率 ω_0 和频率 f_0 分别为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.91)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.92)$$

显然，GLC 并联电路的谐振角频率和谐振频率与 RLC 串联电路的谐振角频率和谐振频率完全一样。根据电路的对偶关系，可以得到 GLC 并联电路的品质因数为

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4.93)$$

2. 并联谐振电路的特点

如图 4.46 所示的并联谐振电路，电路中的电压相量为

$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y} = \frac{\dot{I}}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \quad (4.94)$$

由式(4.94)可知，当电路产生谐振时，有如下特点：

- (1) 导纳最小，且电路呈现纯电阻性。
- (2) 电路中的电压最大，电压与电流同相，此时电压有效值由下式决定

$$U = U_0 = \frac{I}{G} \quad (4.95)$$

- (3) 电路中感纳和容纳相等，即

$$B_C = B_L = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4.96)$$

- (4) 谐振时，电感和电容上的电流相量大小相等，相位相反，其大小为输入电流有效值的 Q 倍。电阻、电感、电容元件上的电流相量分别为

$$\begin{cases} \dot{I}_R = G\dot{U}_0 = \dot{I} \\ \dot{I}_C = j\omega_0 C\dot{U}_0 = j\frac{\omega_0 C}{G}\dot{I} = jQ\dot{I} \\ \dot{I}_L = -j\frac{1}{\omega_0 L}\dot{U}_0 = -j\frac{1}{\omega_0 LG}\dot{I} = -jQ\dot{I} \end{cases} \quad (4.97)$$

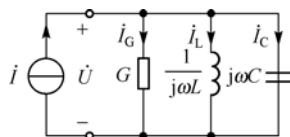


图 4.46 GLC 并联谐振电路

同样, 并联谐振电路的品质因数 Q 通常可达几十甚至上百倍, 因此并联谐振电路发生谐振时, 电抗性元件上的电流可远远高于输入电流 I , 故并联谐振也称做电流谐振。

3. 并联谐振电路的选频特性

对于图 4.46 所示的并联谐振电路, 电路中的电压相量为

$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{\dot{I}G}{1 + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)/G} = \frac{\dot{U}_0}{1 + j\frac{\omega_0 C}{G}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{\dot{U}_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

对应任意频率下的电压有效值与谐振时电压有效值的比值为

$$\frac{U}{U_0} = \frac{|Z(\omega)|}{|Z_0(\omega_0)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (4.98)$$

任意频率下电压与谐振时电压的相位差为

$$\varphi'(\omega) = -\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \quad (4.99)$$

式 (4.98) 和式 (4.99) 分别是并联谐振电路的电压幅频特性和相频特性曲线的数学表达式, 对比串联谐振电路的电流幅频特性和相频特性曲线的式 (4.88) 和式 (4.89), 不难发现公式右边完全相同, 说明并联谐振曲线和串联谐振曲线具有完全相同的形状。只不过并联谐振电路的幅频特性表示的是端电压随频率的变化规律, 相频特性表示的是 \dot{U} 超前于 \dot{U}_0 的相位随频率的变化规律。故不再赘述。

不难求得, 并联谐振电路的通频带仍然为:

$$BW = 2\Delta f = \frac{f_0}{Q} \quad (4.100)$$

与串联谐振电路相同, 并联谐振电路的带宽和选择性也存在矛盾, Q 值越高, 通频带越窄, 选择性越好, Q 值低则频带宽, 但选择性变差。因此简单的串联或并联电路都不能很好地解决这一矛盾, 在实际应用中, 往往采用其他较复杂的谐振电路。

例 4.24 在 RLC 串联谐振电路中, 已知 $R = 100 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$, $C = 200 \text{ pF}$, 电源电压 U 的有效值为 10 V 。求谐振频率 f_0 、品质因数 Q 和谐振时电感电压及电容电压的大小。

解: 串联谐振电路的谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \times 3.14 \sqrt{20 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^{-12}}} = 79.6 \text{ kHz}$$

品质因数为

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{20 \times 10^{-3}}{200 \times 10^{-12}}} = 100$$

谐振时电感电压和电容电压有效值为

$$U_L = U_C = QU = 100 \times 10 = 1000 \text{ V}$$

例 4.25 在 GLC 并联谐振电路中, 已知 $G = 0.01 \text{ S}$, $L = 50 \mu\text{H}$, $C = 200 \text{ pF}$, 求:

(1) 求谐振频率。

(2) 若输入电流 $I = 0.1 \text{ mA}$, 求发生谐振时, 输入端的电压 U 的有效值。

解：并联谐振电路的谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \times 3.14 \sqrt{50 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^{-12}}} = 1591.55 \text{ kHz}$$

谐振时输入端的电压有效值为

$$U = \frac{I}{G} = \frac{0.1 \times 10^{-3}}{0.01} = 10 \text{ mV}$$

4.8 变压器

变压器作为能量传输器件或信号转换器件，在电工技术中应用非常广泛。变压器是一种磁耦合器件，一般由两个(或两个以上)的绕组组成。一个绕组接电源，称为初级绕组或原边绕组；另一个绕组接负载，称为次级绕组或副边绕组。能量通过磁场的耦合，从电源端传送到负载端。

变压器按照有无铁心，可分为铁心变压器和空心变压器两种。铁心变压器是指以具有高磁导率的铁磁材料作为芯子的变压器，它的耦合程度很高，耦合系数可接近 1，属于紧耦合，常用于电力变压器。空心变压器是指以空气或其他非铁磁材料作为芯子的变压器，它的耦合程度较低，耦合系数一般较小，属于松耦合，通常在高频电路中得到广泛应用。

4.8.1 空心变压器

两个物理上相互靠近的线圈，就构成空心变压器，如图 4.47(a) 所示(图中的方框是为说明线圈的绕向而设置)，在电路分析中可以用耦合电感来构成它的模型，图 4.47(b) 所示为空心变压器简化电路的模型。图中 L_1 、 L_2 分别为原、副边绕组的电感， M 为两个相互耦合的线圈之间的互感系数，这些均为描述空心变压器的参数。图中原、副边绕组上标注的“·”称做变压器的同名端，用于表明具有互感的两个线圈的绕向关系。

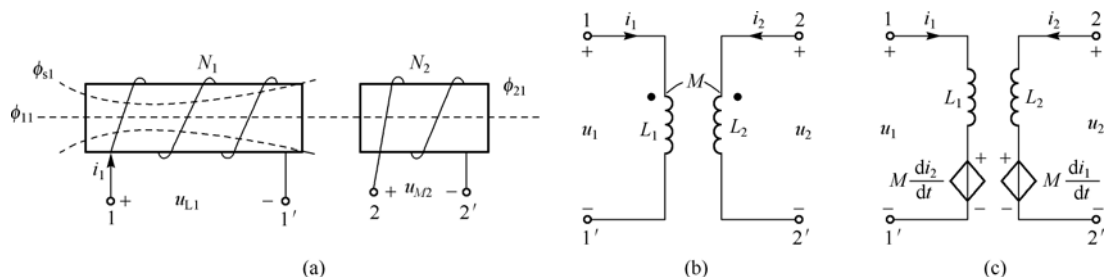


图 4.47 绕向相同的空心变压器电路模型

在同一交变磁通的作用下任意时刻两个(或两个以上)绕组中具有相同电势极性的端头彼此互为同名端。从线圈的绕向关系看，若两个绕组的绕向一致，两个绕组的起绕点互为同名端；若两个绕组绕向相反，则其中一个绕组的起绕点和另一个绕组的结束点互为同名端。

对于图 4.47(b) 所示的耦合电感，每个线圈中的感应电压包括两部分，一部分是由线圈自感磁链产生的自感电压(u_{L1} 或 u_{L2})，另一部分是由互感磁链产生的互感电压(u_{M1} 或 u_{M2})。若初级绕组端口和次级绕组端口上的电压和电流均选关联的参考方向，根据电磁感应定律，可以得到

$$\begin{cases} u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d(\psi_{11} + \psi_{12})}{dt} = u_{L1} + u_{M1} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d(\psi_{21} + \psi_{22})}{dt} = u_{L2} + u_{M2} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (4.101)$$

式(4.101)为图4.47(b)所示的耦合电感伏安关系,根据这一关系,图4.47(b)所示的耦合电感用图4.47(c)所示的去耦等效模型表示。当 i_1 和 i_2 为同频率的正弦交流电流时,式(4.101)对应的相量关系为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases} \quad (4.102)$$

利用式(4.102)就可以对含空心变压器的正弦稳态电路进行分析。

当空心变压器的两个绕组绕向相反时,如图4.48所示,不难证明,初、次级绕组端口电压和电流的相量关系变为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 \end{cases} \quad (4.103)$$

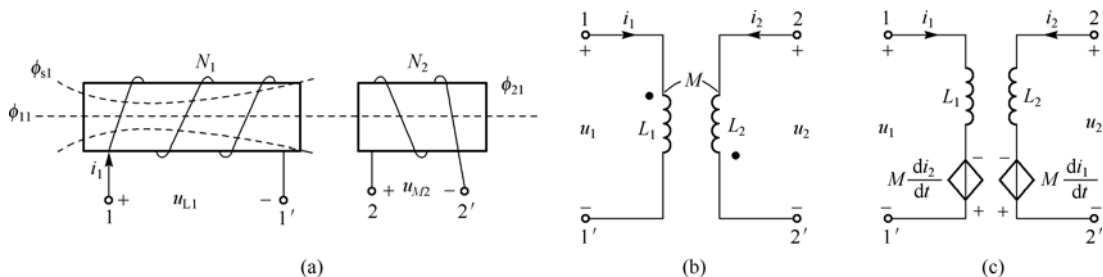


图 4.48 绕向相反的空心变压器电路模型

例 4.26 电路如图 4.49(a)所示,已知 $u_s(t) = 10\sqrt{2} \cos 10t$ V,试求:

(1) $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$;

(2) 1.6Ω 负载电阻吸收的功率。

解: (1) 电路所对应的相量模型如图 4.49(b)所示,分别列出初级、次级回路的 KVL,即

$$\begin{cases} (1+j3)\dot{I}_1 + j2\dot{I}_2 = 10 \\ (0.4+1.6+j2)\dot{I}_2 + j2\dot{I}_1 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 2.5\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_2 &= -2.5 \text{ A} \end{aligned}$$

对应的正弦电流为

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 5 \cos(10t - 45^\circ) \text{ A} \\ i_2(t) &= 2.5\sqrt{2} \cos(10t + 180^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

(2) 1.6Ω 负载电阻吸收的功率为

$$P = R_L I_2^2 = 1.6 \times 2.5^2 = 10 \text{ W}$$

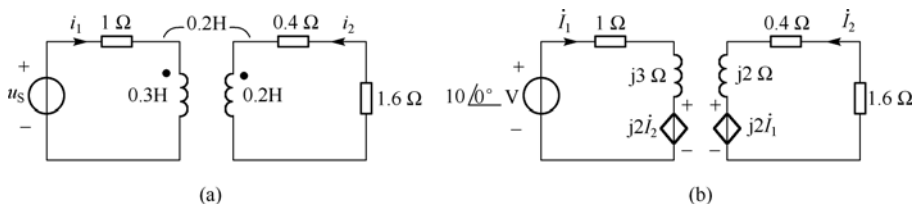


图 4.49 例 4.26 图

4.8.2 理想变压器

实际变压器大都含有铁心, 由于铁磁材料的高导磁性, 大部分磁通量局限在铁心里, 因此铁心变压器的两个绕组可以获得相当高程度的磁耦合。为了便于对实际变压器进行分析研究, 常常忽略漏磁通、初次级绕组上的电阻以及变压器上的各种损耗, 把变压器看成是一个无损耗的电压电流转换器件, 经过这样理想化处理的电路元件称为理想变压器。

1. 理想变压器的电压变换

图4.50(a)所示为理想变压器的结构示意图, 其电路模型如图4.50(b)所示。图中理想变压器的初、次级匝数分别为 N_1 和 N_2 , 设初、初级电压 u_1 、 u_2 与各自绕组上的电流 i_1 、 i_2 为关联参考方向。由于理想变压器为全耦合, 则绕组的互感磁通必等于自感磁通, 即

$$\phi_{11} = \phi_{21}$$

$$\phi_{12} = \phi_{22}$$

穿过初、次级绕组的磁通相同, 即

$$\phi_{11} + \phi_{12} = \phi_{11} + \phi_{22} = \phi$$

$$\phi_{22} + \phi_{21} = \phi_{22} + \phi_{11} = \phi$$

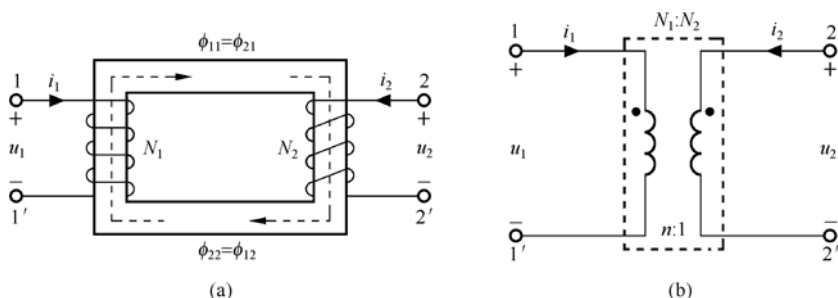


图 4.50 理想变压器示意图及其模型

因此, 与初、次级绕组交链的磁通链分别为

$$\psi_1 = N_1 \phi$$

$$\psi_2 = N_2 \phi$$

由法拉第电磁感应定律, 得初、次级电压分别为

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

故

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad (4.104)$$

式(4.104)中, $n = \frac{N_1}{N_2}$ 是理想变压器初、次级绕组的匝数比, 称为理想变压器的变比, 它是描述理想变压器的唯一参数。式(4.104)表明, 理想变压器的初、次级电压的大小与初、次级线圈的匝数成正比。这是理想变压器的重要特性之一。如果 $N_2 > N_1$, 即 $n < 1$, 称为升压变压器; 反之称为降压变压器。

2. 理想变压器的电流变换

由于图4.50所示的理想变压器是一个没有任何损耗的变换器,因此其初级绕组从电源端吸收的功率将全部传递给次级绕组上的负载,即

$$p_1 = p_2$$

由于初级绕组吸收电源的功率为

$$p_1 = u_1 i_1$$

而次级绕组传递给负载的功率为

$$p_2 = -u_2 i_2$$

因此,可得到

$$u_1 i_1 = -u_2 i_2$$

则

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{n} \quad (4.105)$$

式(4.105)表示了理想变压器的另一重要特性:理想变压器初、次级电流的大小与其初、次级匝数成反比,式中的负号表示 i_2 的实际方向与图示方向相反。

若将图4.50所示理想变压器的同名端改为图4.51所示,式(4.104)和式(4.105)将改为

$$\begin{cases} \frac{u_1}{u_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -n \\ \frac{i_1}{i_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{n} \end{cases} \quad (4.106)$$

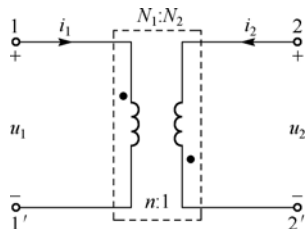


图4.51 另一种理想变压器模型

比较两种不同同名端位置的变压器对应的伏安关系,可以发现变压器伏安关系的符号有如下规律:

- (1) 当两边电压的参考极性与同名端的位置一致时,电压关系式取正号,否则取负号。
- (2) 当两个电流皆为流入或流出同名端时,电流关系式取负号,否则取正号。

此外,由式(4.104)、式(4.105)或式(4.106)可以看到,理想变压器的电压电流关系式均为代数关系,说明理想变压器不同于耦合电感,是一种非记忆元件。在电路图中,理想变压器虽然仍用线圈作为模型符号,但这个符号不代表任何电感的作用,只代表着如同式(4.104)、式(4.105)或式(4.106)所示的电压之间以及电流之间的简单约束关系。

3. 理想变压器的阻抗变换

理想变压器除了具有变换电压和变换电流的特性外,还具有改变阻抗大小的特性。

在图4.52(a)所示的理想变压器模型中,设初级线圈1、1'的输入电阻为 R_{11} ,次级线圈2、2'接入的负载电阻为 R_{22} ,则输入电阻 R_{11} 为

$$R_{11} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{nu_2}{\frac{1}{-n}i_2} = n^2 \frac{u_2}{i_2} = n^2 R_{22} \quad (4.107)$$

式(4.107)表明,当理想变压器的次级接电阻 R_{22} 时,对初级端口来说,相当于接了一个值为 $n^2 R_{22}$ 的电阻,即理想变压器具有变换电阻的作用。

同理,若图4.52(a)为正弦稳态电路,负载 R_{22} 改为复阻抗 Z_{22} ,则初级端口的输入阻抗 Z_{11} 为

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = n^2 Z_{22} \quad (4.108)$$

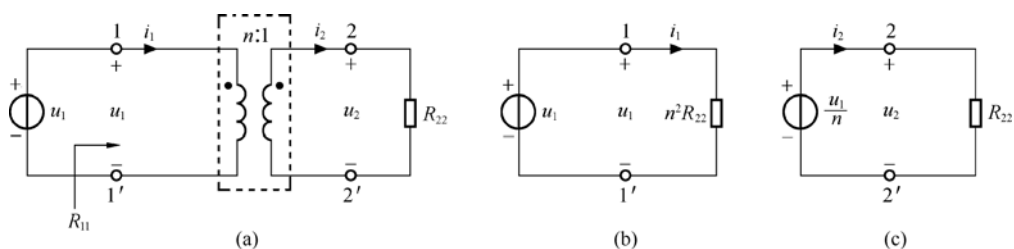


图 4.52 理想变压器负载电阻的变换

由式(4.108), 不难看出两种特殊情况下理想变压器的输入阻抗:

- (1) 当 $Z_{22}=0$ 时, $Z_{11}=0$, 说明理想变压器的次级短路时, 相应的初级也短路。
- (2) 当 $Z_{22}=\infty$ 时, $Z_{11}=\infty$, 说明理想变压器的次级开路时, 相应的初级也等效为开路。

在实际应用中, 常利用变压器的阻抗变换特性通过改变理想变压器的变比 n 来改变负载阻抗, 以实现与电源的匹配, 使负载获得最大功率。例如收音机电路中, 作为负载的扬声器电阻 R_L 一般不等于收音机电路中的功率放大电路输出等效内阻 R_0 , 利用输出变压器的阻抗变换作用, 就可使扬声器获得最大的功率。

例 4.27 电路如图 4.53 所示, 已知 $\dot{U}_S = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$, $R_0 = 100 \Omega$, $R_L = 1 \Omega$, $n = 5$ 。试求: \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 及负载 R_L 吸收的功率 P 。

解: 根据理想变压器的阻抗变换特性, 理想变压器初级绕组端口上的等效电阻为

$$R_{11} = n^2 R_L = 25 \Omega$$

由输入回路的 KVL, 可得

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{R_0 + R_{11}} = \frac{50 \angle 0^\circ}{100 + 25} = 0.4 \angle 0^\circ \text{ A}$$

由理想变压器的电流变换关系, 可得

$$\dot{I}_2 = -n \dot{I}_1 = -5 \times 0.4 \angle 0^\circ = 2 \angle -180^\circ \text{ A}$$

负载 R_L 吸收的功率 P 为

$$P = I_2^2 R_L = 4 \text{ W}$$

例 4.28 电路如图 4.54(a) 所示, 已知 $u_S(t) = 4\sqrt{2} \cos t \text{ V}$ 。

- (1) 若 $n=2$, 求电流 \dot{I} 及负载 R_L 吸收的功率 P 。
 - (2) 若匝比 n 可改变, 问 n 等于多少时可使负载上获得最大功率, 该最大功率 P_{\max} 值为多少?
- 解:** (1) 电路所对应的相量模型如图 4.54(b) 所示, 理想变压器次级绕组端口上的等效阻抗为

$$Z_{a'b'} = \frac{1}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{-j}} = 1 \Omega$$

由理想变压器的阻抗变换特性, 理想变压器初级绕组端口上的等效阻抗为

$$Z_{ab} = n^2 Z_{a'b'} = 2^2 \times 1 = 4 \Omega$$

由输入回路的 KVL, 可得

$$\dot{I} = \frac{4 \angle 0^\circ}{16 + 4} = 0.2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

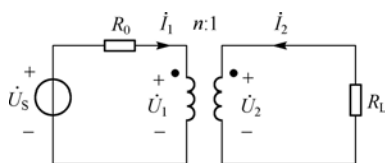


图 4.53 例 4.27 图

由于理想变压器不消耗任何功率,因此次级绕组负载 R_L 上吸收的功率就是初级绕组输入的功率,即

$$P = I_1^2 \operatorname{Rm}(Z_{ab}) = 0.2^2 \times 4 = 0.16 \text{ W}$$

(2) 根据最大功率传输定理,当负载电阻 R_L 折合到初级回路的阻值与电源内电阻 R_1 相等时,获得最大功率,因此

$$n = \sqrt{\frac{R_1}{R_L}} = \sqrt{\frac{16}{1}} = 4$$

此时,负载 R_L 上的最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_S^2}{4R_1} = \frac{4^2}{4 \times 16} = 0.25 \text{ W}$$

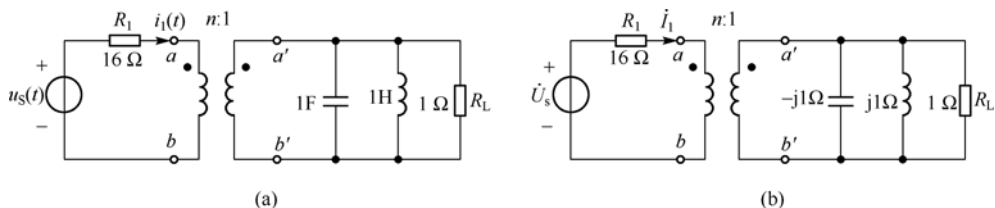


图 4.54 例 4.28 图

4.9 三相电路

目前,世界各国的供电系统普遍采用“三相制”。三相制是指由三个频率、振幅相等,相位彼此相差 120° 的正弦交流电源供电的体系。与单相交流电源相比,三相电源在发电、输电和用电等方面有着很多的优势,如输出功率高、性能平稳、节省输电线铜耗,以及三相负载结构简单、经济可靠等。我们熟知的 220V 正弦交流电就是三相交流发电机输送出来的三相电源中的一相。就研究方法而言,本章前面讨论的单相正弦交流电路的分析法在三相交流电路中完全适用。

4.9.1 三相电源

1. 三相电动势的产生

图 4.55 所示是三相交流发电机的原理图,在磁极 N、S 中间放一圆柱形铁心,圆柱形铁心外圆安装了三个结构上完全相同,空间位置上彼此相差 120° 的线圈,三个线圈的首端分别用 A、B、C 表示,末端分别用 X、Y、Z 表示,AX、BY、CZ 构成了三相发电机的对称三相绕组。铁心和绕组共同构成发电机的电枢,电枢是固定的,亦称定子,磁极是转动的,称为转子。

当转子以角速度 ω 匀角速旋转时,每相定子绕组依次切割磁感应线,在绕组中产生正弦感应电动势。若以 AX 绕组为参考,三相感应电动势依次是

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \cos \omega t \\ e_B &= E_m \cos(\omega t - 120^\circ) \\ e_C &= E_m \cos(\omega t - 240^\circ) = E_m \cos(\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \quad (4.109)$$

式(4.109)为三个振幅、频率相等,而相位依次滞后 120° 的正弦交流电,称为对称三相电动势。在电工技术中把三相电动势达到最大值的先后次序称为相序,当转子按照顺时针方向旋转时,三相电动势

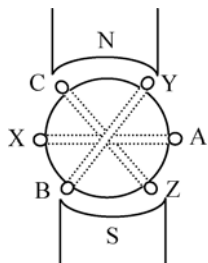


图 4.55 三相交流发电机示意图

到达最大值的顺序为 A-B-C, 称这样的相序为正序或顺序。反之, 则称为负序或逆序。当相序为负序时, 三相电动势将表示为

$$\begin{cases} e_A = E_m \cos \omega t \\ e_B = E_m \cos(\omega t + 120^\circ) \\ e_C = E_m \cos(\omega t - 120^\circ) \end{cases}$$

显然正序和负序对应的电动势表达式只是相位上相差一个负号。电力系统中一般都采用正序, 应用中, 常用不同颜色的线标志各相接线及端子, 如我国采用黄、红、绿三色分别标志 A、B、C 三相。在以后的讨论中, 如果不加声明, 就认为是正序。

式(4.109)所示的三相电动势为正弦量, 可以用相量式表示为

$$\begin{cases} \dot{E}_A = E \angle 0^\circ \\ \dot{E}_B = E \angle -120^\circ \\ \dot{E}_C = E \angle 120^\circ \end{cases} \quad (4.110)$$

对称三相交流电的波形图和相量图如图 4.56 所示。

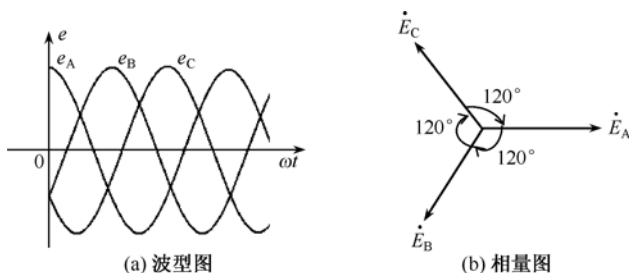


图 4.56 对称三相交流电的波形图和相量图

根据图 4.56 所示的波形图和相量图, 可得

$$\begin{aligned} e_A + e_B + e_C &= 0 \\ \dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C &= 0 \end{aligned} \quad (4.111)$$

这是对称三相电动势的一个重要性质, 给分析计算三相电路带来很多方便。

2. 三相电源的连接

三相发电机的每一相绕组都是独立的电源, 均可单独为负载供电, 但这样供电需要 6 根传输线, 造成很大浪费。因此, 实际应用中要将三相电源按一定方式连接后才向负载供电。常用的连接方式有两种, 一种是星形连接方式, 另一种是三角形连接方式。

(1) 星形连接

将三相发电机的三个绕组的末端 X、Y、Z 连在一起, 由始端 A、B、C 分别引出引线与负载相连, 这种连接方式称为三相电源星形连接方式, 如图 4.57 所示。图中三个绕组末端的连接点又称为中点, 用 N 表示, 从中点引出的引线称为中线或零线; 从三个绕组的始端引出的引线称为相线或端线。

在电力配电系统中, 采用三根相线和一根中线输电的方式, 称为三相四线制。如果三相电源仅通过三根相线向外输电, 这种方式称为三相三线制。在三相四线制电源系统中, 中线可以与大地直接连接, 这时的中线又称为地线, 相应的相线俗称火线。

星形连接的电源可以提供两种输出电压, 即相电压和线电压。相线与中线之间的电压叫相电压,

其瞬时值用 u_A 、 u_B 、 u_C 表示, 相电压的参考方向由绕组的始端指向末端, 其有效值一般用 U_p 表示。任意两根相线之间的电压称为线电压, 瞬时值用 u_{AB} 、 u_{BC} 、 u_{CA} 表示, 线电压的参考方向取决于相序, 正序时三个线电压的参考方向依次是 A 端指向 B 端、B 端指向 C 端、C 端指向 A 端, 负序时则相反, 三个线电压的参考方向依次是 A 端指向 C 端、C 端指向 B 端、B 端指向 A 端, 线电压的有效值一般用 U_L 表示。

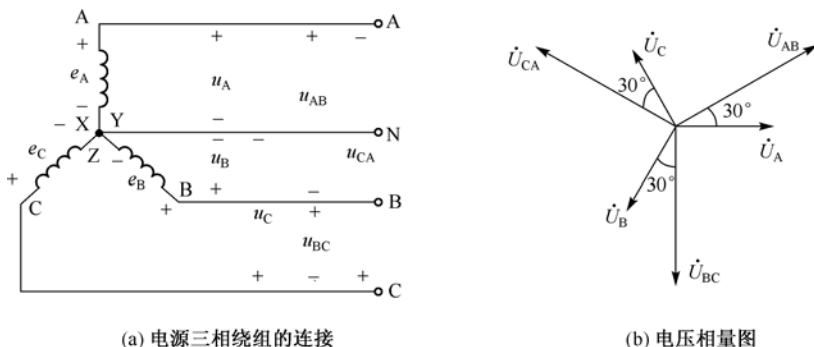


图 4.57 三相发电机绕组的星形连接电路及电压

由于三相绕组中的内阻很小, 绕组上的内阻压降相比于相电压可忽略不计, 相电压与对应绕组上的电动势就近似相等。因此当三相电源对称时, 三个相电压也是对称的。三个相电压的相量形式为

$$\begin{cases} \dot{U}_A = U_p \angle 0^\circ \\ \dot{U}_B = U_p \angle -120^\circ \\ \dot{U}_C = U_p \angle 120^\circ \end{cases} \quad (4.112)$$

根据基尔霍夫电压定律, 可得

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = U_p \angle 0^\circ - U_p \angle -120^\circ = \sqrt{3}U_p \angle 30^\circ = \sqrt{3}\dot{U}_A \angle 30^\circ \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = U_p \angle -120^\circ - U_p \angle 120^\circ = \sqrt{3}U_p \angle -90^\circ = \sqrt{3}\dot{U}_B \angle 30^\circ \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = U_p \angle 120^\circ - U_p \angle 0^\circ = \sqrt{3}U_p \angle 150^\circ = \sqrt{3}\dot{U}_C \angle 30^\circ \end{cases}$$

统一表示为

$$\dot{U}_L = \sqrt{3}\dot{U}_p \angle 30^\circ \quad (4.113)$$

式(4.113)表明, 对称星形连接电源电路中线电压是相电压的 $\sqrt{3}$ 倍, 线电压的相位超前于对应相电压相位 30° , 线电压与相电压相量关系如图 4.57 (b) 所示。这个结论对于星形连接的对称负载也成立。

(2) 三角形连接

将三相发电机的三个绕组的始、末端依次连接, 形成一个闭合的回路, 由绕组的首端 A、B、C 向外引出三条端线供电, 这种连接方式称为电源的三角形连接, 如图 4.58 所示。图中流过每一相电源的电流称为相电流, 其瞬时值分别用 i_{AB} 、 i_{BC} 、 i_{CA} 表示, 相电流的参考方向与相电压的参考方向相关联, 其有效值一般用 I_p 表示。端线上流过的电流称为线电流, 其瞬时值分别是 i_A 、 i_B 、 i_C , 方向由电源端流向负载端, 其有效值一般用 I_L 表示。

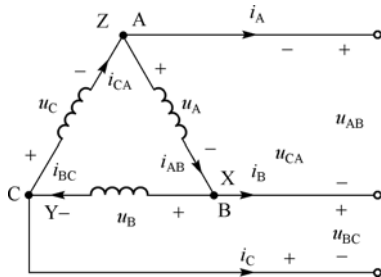


图 4.58 三相电压源的三角形连接

由图 4.58 不难看出，三角形连接的三相电源没有中点，线电压就是相电压，其相量关系式为

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C \end{cases} \quad (4.114)$$

需要特别注意的是，三相电源做三角形连接时，各单相电源要依次相接，如果接法正确，电源回路中没有电流。但是如果有一相绕组接反，电源回路中的电动势总和将不为零，电源回路中将产生很大的环流，以至于烧毁电源。因此实际应用中，为确保三相电源连接无误，可以先把三个绕组接成开口三角形，再用一个量程大于两倍电源相电压的电压表测试其开口端的电压。如果电压表的读数为零，就可以断定绕组接线正确，否则一定有一相绕组反接了。

4.9.2 负载星形连接的三相电路

1. 三相负载及其连接方式

负载按对电源的要求分为单相负载和三相负载两类。单相负载是指需要单相电源供电的设备，如民用电上的各种设备。三相负载是指同时需要三相电源供电的负载，如三相异步电动机、大功率熔炼炉等。与三相电源类似，三相负载的连接也有星形连接和三角形连接两种方式，如图 4.59 (a)、(b) 所示。如果每相负载的阻抗都相等，就称为对称负载，否则均称为不对称负载。

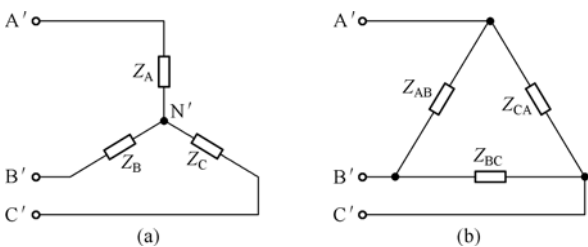


图 4.59 三相负载的连接方式

2. 对称 Y-Y 连接的三相电路分析

当电源是三相星型对称电源，负载也为星型对称负载时，电源与负载通过三根火线和一根地线连接，这种连接方式称为对称 Y-Y 连接，如图 4.60 所示。

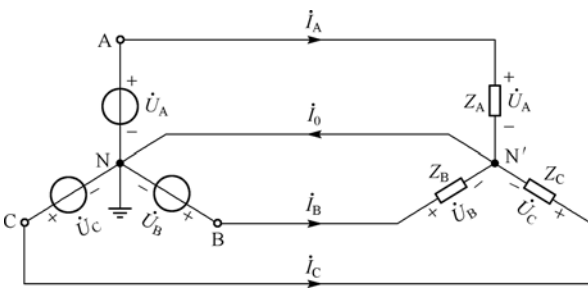


图 4.60 对称 Y-Y 连接

对称 Y-Y 连接的三相电路有如下特点：

- (1) 当忽略传输导线上的阻抗时，各相负载承受的电压为电源的相电压。
- (2) 由于三相负载对称，在三相对称相电压的作用下负载中的三相电流也是对称的，因而三相对称电流的矢量和为零，中线电流 I_0 为零，所以对称 Y-Y 连接可以不要中线。

(3) 各相负载的线电流 I_l 与相电流 I_p 相等, 对应的电流相量可根据每个单相回路计算得到, 即

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{N'N}}{Z_A} = \frac{\dot{U}_A}{Z_A} \\ \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{N'N}}{Z_B} = \frac{\dot{U}_B}{Z_B} \\ \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{N'N}}{Z_C} = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} \end{cases} \quad (4.115)$$

例4.29 对称三相电路如图 4.60 所示, 已知 $u_{AB} = 380\sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ)$ V, 各相负载阻抗均为 $Z = (6 + j8) \Omega$, 试求三相负载上的各电流相量。

解: 根据已知条件, 得线电压和相电压相量分别为

$$\dot{U}_{AB} = 380 \angle 30^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

根据 A 相单一回路的 KVL, 可得

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{6 + j8} = 22 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

根据对称性可以写出另外两相电流相量为

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= 22 \angle -173.1^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_C &= 22 \angle 66.9^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

3. 不对称 Y-Y 连接的三相电路分析

对于图 4.60 所示的电路, 如果负载不对称, 对应的电路称为不对称 Y-Y 连接的三相电路。在实际应用中, 通常是将许多单相负载分成容量大致相等的三相, 分别接到三相电源上, 这样构成的三相负载通常是不对称的。

不对称的 Y-Y 连接电路具有如下特点:

(1) 由于三相负载不对称, 三相电流也不对称, 其三相电流的矢量和不为零, 因此必须引一根中线供电流不对称部分流过, 即必须用三相四线制。

(2) 由于中线的作用, 在忽略传输导线阻抗时, 中线强制使中线上电压为零, 因此各相负载承受的电压等于电源相电压, 并且不随负载的改变而变化, 各相保持独立性而互不影响, 各相负载上电流仍可根据每个单相回路计算得到, 如式 (4.115) 所示。

(3) 如果没有中线, 或者中线断开了, 各相负载的端电压相互关联, 三相化归一相电路的计算方法也随之失效。将图 4.60 画为图 4.61(a) 的形式, 图 4.61(b) 为该电路电源相电压和每相负载电压的相量关系图。由图可知, 各相负载的端电压分别为

$$\begin{cases} \dot{U}_A = \dot{U}_A - \dot{U}_{N'N} \\ \dot{U}_B = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} \\ \dot{U}_C = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} \end{cases} \quad (4.116)$$

式 (4.116) 中, $\dot{U}_{N'N}$ 可用节点电压法求解得到

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\frac{\dot{U}_A}{Z_A} + \frac{\dot{U}_B}{Z_B} + \frac{\dot{U}_C}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}}$$

可见, 负载不对称时, $\dot{U}_{N'N}$ 的大小不为 0, 各相负载承受的相电压不再对称。有的相电压增高了, 有的相电压降低了。这样不但使负载不能正常工作, 有时还会造成事故。

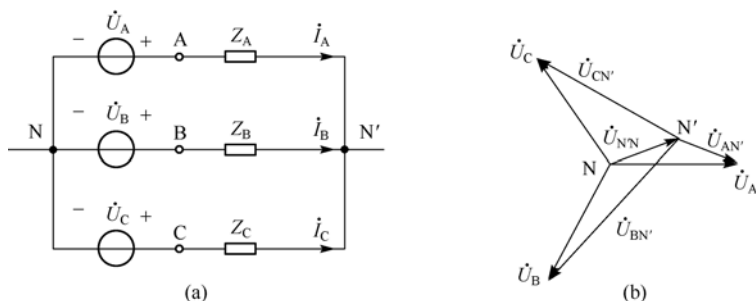


图 4.61 无中线不对称 Y-Y 连接的三相电路

例 4.30 图 4.62(a) 所示电路为测定三相电源相序的相序指示器, 任意指定一相电源为 A 相后, 指示器指示出其他两相中的 B 相和 C 相。图中指示器由两个白炽灯和一个电容器组成星形连接。把电容器接到指定的 A 相, 两个白炽灯分别接另外两相。由于这组负载不对称, 两个白炽灯的电压不等, 亮度不同, 可以决定相序。设电容器的容纳 $\omega C = G$, 试问较亮的白炽灯所接的是 B 相还是 C 相?

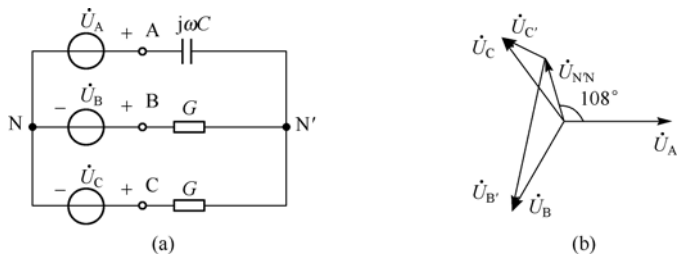


图 4.62 例 4.30 电路图和相量图

解: 设 $\dot{U}_A = U \angle 0^\circ$, $\dot{U}_B = U \angle -120^\circ$, $\dot{U}_C = U \angle 120^\circ$, 则中点电压为

$$\begin{aligned}\dot{U}_{N'N} &= \frac{jG\dot{U}_A + G(\dot{U}_B + \dot{U}_C)}{jG + G + G} \\ &= (-0.2 + j0.6)U = 0.63 \angle 108.4^\circ\end{aligned}$$

作相量图如图 4.62(b) 所示, 先作 \dot{U}_A 、 \dot{U}_B 、 \dot{U}_C , 再按所得结果做出 $\dot{U}_{N'N}$, 然后就可以做出两个白炽灯的电压 \dot{U}'_B 和 \dot{U}'_C 。从相量图可以看出 $\dot{U}'_B > \dot{U}'_C$, 从而知道灯泡较亮的一相为 B 相, 较暗的为 C 相。

也可以通过计算得出 B 相灯泡承受的电压为

$$\begin{aligned}U'_B &= \dot{U}'_B = \dot{U}_B - \dot{U}_{N'N} = 1.5U \angle -101.5^\circ \\ U'_C &= \dot{U}'_C = \dot{U}_C - \dot{U}_{N'N} = 0.4U \angle 133^\circ\end{aligned}$$

则有

$$\frac{U'_B}{U'_C} = \frac{1.5}{0.4} = 3.75$$

显然 $U'_B > U'_C$, B 相的灯泡比 C 相的亮。

4.9.3 负载三角形连接的三相电路

三个负载阻抗首尾相接连接成一个闭环,三个连接点分别与电源的三根火线相连,就构成了负载的三角形连接,如图 4.63 (a) 所示。该电路的特点是:

(1) 三角形连接没有零线,只能配接三相三线制电源,无论负载对称与否,各相负载承受的电压均为线电压,由于三相电源对称,因而三角形负载的相电压也对称。

(2) 当三相负载对称时,三个负载的相电流也对称。图中每相负载的相电流分别为 \dot{I}_{AB} 、 \dot{I}_{BC} 、 \dot{I}_{CA} , 而线电流分别为 \dot{I}_A 、 \dot{I}_B 、 \dot{I}_C 。

$$\dot{I}_{AB} = I \angle 0^\circ, \quad \dot{I}_{BC} = I \angle -120^\circ, \quad \dot{I}_{CA} = I \angle 120^\circ$$

根据 KCL, 线电流与相电流之间的关系为

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = \sqrt{3} \dot{I}_{AB} \angle -30^\circ \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = \sqrt{3} \dot{I}_{BC} \angle -30^\circ \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = \sqrt{3} \dot{I}_{CA} \angle -30^\circ\end{aligned}\quad (4.117)$$

式(4.117)说明:数值上,线电流是相电流的 $\sqrt{3}$ 倍;相位上,线电流滞后对应的相电流 30° 。由于三相对称,因此

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

实际计算时,只需计算出一相电流 \dot{I}_A , 就可以依次写出另两相电流。这种分析方法对星形和三角形电源都适用。

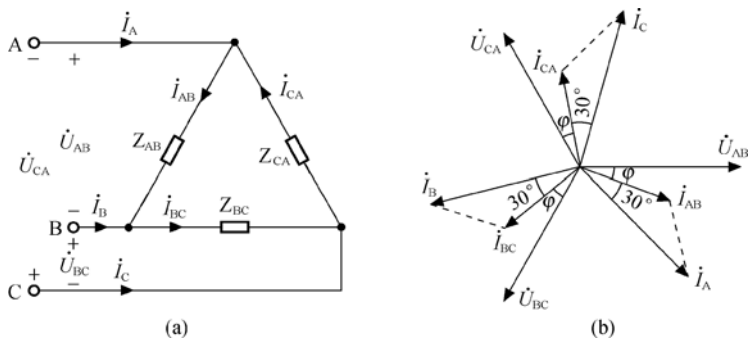


图 4.63 三角形负载及其电压电流的相量图

(3) 当三相负载不对称时,每相负载的电流不对称,式(4.115)不再成立。此时,必须采用复杂的正弦稳态电路分析法分析求解。

例 4.31 在某三相对称电路中,已知每相负载阻抗 $Z = 10 \angle 60^\circ \Omega$,电源线电压有效值为 $U_L = 380 \text{ V}$,求负载分别接为星形和三角形连接时的相电压、相电流和线电流的有效值。

解: (1) 当负载为星形连接时,有

$$U_P = \frac{1}{\sqrt{3}} U_L = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 380 = 220 \text{ V}$$

$$I_P = I_L = \frac{U_P}{|Z|} = \frac{220}{10} = 22 \text{ A}$$

(2) 当负载为三角形连接时,有

$$U_p = U_L = 380 \text{ V}$$

$$I_p = \frac{U_p}{|Z|} = \frac{380}{10} = 38 \text{ A}$$

$$I_L = \sqrt{3}I_p = \sqrt{3} \times 38 = 65.8 \text{ A}$$

4.9.4 三相电路的功率

在 4.6 节中我们学习了单相正弦交流电路的功率关系, 其有功功率、无功功率、视在功率法计算公式分别为

$$P = UI \cos \varphi$$

$$Q = UI \sin \varphi$$

$$S = UI$$

三相正弦交流电路可看成是由三个单相交流电路组合而成, 因而三相总的有功功率(或无功功率)等于各单相交流电路有功功率(或无功功率)之和, 即

$$P = P_A + P_B + P_C$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C$$

视在功率不符合功率守恒, 应按照视在功率与有功功率和无功功率的关系求解, 即

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

当三相负载对称时, 无论负载是星形连接还是三角形连接, 各相功率都是相等的, 因此三相功率是每相功率的 3 倍, 即

$$P = 3U_p I_p \cos \varphi_p = \sqrt{3}U_L I_L \cos \varphi_p$$

$$Q = 3U_p I_p \sin \varphi_p = \sqrt{3}U_L I_L \sin \varphi_p \quad (4.118)$$

$$S = 3U_p I_p = \sqrt{3}U_L I_L$$

同样, 三相电路的瞬时功率也等于各单相负载瞬时功率之和。可以证明, 当电路对称时, 三相瞬时功率之和是一个常量, 其值等于三相电路的平均功率, 即

$$p = p_A + p_B + p_C = 3U_p I_p \cos \varphi \quad (4.119)$$

式(4.119)表明的关系是对称三相电路的一个独特性质, 习惯上把这种性质称为瞬时功率的平衡, 或称平衡制。正是这种性能, 使三相电动机的稳定性高于单相电动机, 因而得到广泛的应用。

例 4.32 一台三相异步电动机, 铭牌上额定电压是 220/380 V, 接线是 Δ/Y , 额定电流是 11.2/6.48 A, $\cos \varphi = 0.84$ 。试分别求出电源线电压为 380 V 和 220 V 时, 输入电动机的电功率。

解: (1) 电源线电压为 380 V, 按铭牌规定电动机绕组应连接成星形, 输入功率

$$\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{3}U_l I_l \cos \phi \\ &= 1.732 \times 380 \times 6.48 \times 0.84 \\ &= 3577 \text{ W} \approx 3.6 \text{ kW} \end{aligned}$$

(2) 电源线电压为 220 V, 按铭牌规定电动机绕组应连接成三角形, 输入功率

$$\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{3}U_l I_l \cos \phi \\ &= 1.732 \times 220 \times 11.2 \times 0.84 \\ &= 3584 \text{ W} \approx 3.6 \text{ kW} \end{aligned}$$

通过此例可知, 只要按照铭牌的规定去接线, 电动机的输入电功率是一样的。

4.10 Multisim 正弦稳态分析

运用 Multisim 2001 软件对正弦稳态电路进行分析, 可以利用虚拟仪器做测量仿真, 也可以使用软件的 AC 频率扫描分析功能, 对工作频率附近的测试点电压的有效值和相位值进行分析。

4.10.1 用虚拟仪器做测量仿真

利用虚拟仪器对正弦稳态电路进行测量仿真, 可以直观的得到正弦稳态电路正弦电压、电流的瞬时值, 也可以运用虚拟示波器观察正弦信号的波形及相位关系。

例 4.33 用电压表和示波器测量简单 RC 电路的电压和相位关系, 改变电感参数, 让电感和电阻上电压有效值相等, 观察其相位关系。

解: (1) 按图 4.64 所示建立仿真电路, 设定电源频率为 $f = 1 \text{ kHz}$, 电源电压的幅度为 1.414 V , 可变电感元件电感 $L = 200 \text{ mH}$, 且电感增量设定为最小值 1% , 电阻 $R = 1 \text{ k}\Omega$, 图中所连电压表均设定为 AC 档。

(2) 启动仿真, 观察各电压表读数, 按 A 或 a 键调节电感 L 的值, 使得电感 L 和电阻 R 上的电压有效值接近相等。此时, 电感值为 $L = 200 \times 79\% = 158 \text{ mH}$ 。

当电感 $L = 158 \text{ mH}$ 时, 容抗为

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.15 \times 10^3 \times 158 \times 10^{-3} = 992.24 \ \Omega$$

显然此时电感 L 的感抗与电阻的阻值接近。根据理论分析表明, 当电感的感抗与电阻的阻抗相等时, 电感电压有效值与电阻电压有效值相等, 即

$$\dot{U}_R = \frac{R}{R + j\omega L} \dot{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_L = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \dot{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \text{ V}$$

实验结果验证了这点。

(3) 用示波器 XSC1 观察输入电压 V_1 和输出电压 (即电阻 R 上的电压) V_R 的波形。示波器面板设置及显示的波形如图 4.65 所示。

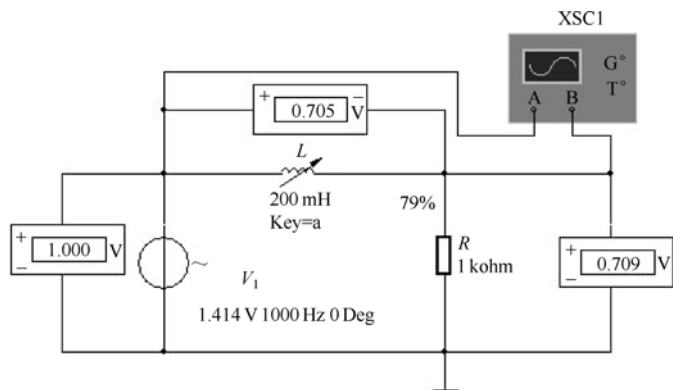


图 4.64 例 4.33 电路图

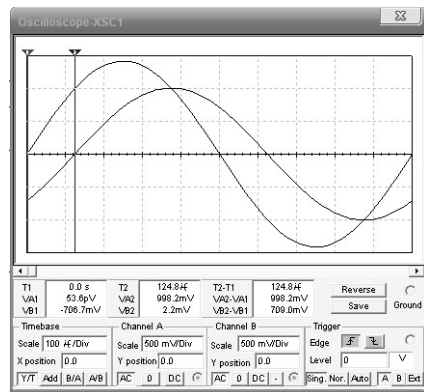


图 4.65 例 4.33 输入输出波形

仿真电路中输入电压 V_1 接示波器的 A 通道，输出电压 V_R 接示波器的 B 通道，示波器面板中 Timebase 下 X 轴扫描比率 Scale 设置为 $100\text{ }\mu\text{s/Div}$ ，而 Channel A 或 Channel B 下信号幅度比率 Scale 设置为 500 mV/Div ，将 T1、T2 两个时间轴测量参考线置于 V_1 、 V_R 波形过零点的时刻。可以看到输出电压 V_R 滞后于输入电压 V_1 ， $T_2-T_1=124.8\text{ }\mu\text{s}$ 。由于信号的周期为 1 ms ，因此输出电压滞后输入电压的相位差为

$$\varphi = (T_2 - T_1) \frac{360^\circ}{T} = 44.93^\circ$$

与理论计算的结果基本吻合。

例 4.34 串联谐振电路调谐实验。通过调节 RLC 串联谐振电路中的固有频率，使电路达到谐振，观察发生谐振前后电路中的电流和电压。

解：(1) 按图 4.66 所示建立仿真电路，选取 $R_1=10\text{ }\Omega$ ， $L_1=1\text{ mH}$ ，可变电容 $C_1=300\text{ nF}$ ，AC 电压表和电流表分别按图 4.66 所示进行连接，交流电压源频率为 10 kHz ，幅度为 1.414 V 。

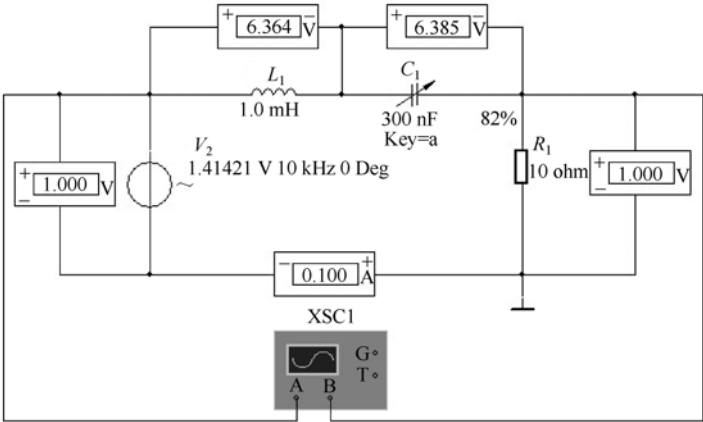


图 4.66 例 4.34 在 $R_1=10\text{ }\Omega$ 时的谐振电路

(2) 启动仿真，观察各电压表和电流表读数，按 A 或 a 键调节电容 C 的值，当电阻电压有效值与电压源电压有效值相等时，电路发生串联谐振。此时，电容

$$C_{10} = 300 \times 82\% = 246\text{ nF}$$

理论上，电路发生谐振时，满足

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

即调谐电容应接近

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = \frac{1}{(2\pi \times 10 \times 10^3)^2 \times 10^{-3}} = 253\text{ nF}$$

理论计算与实验结果基本吻合。

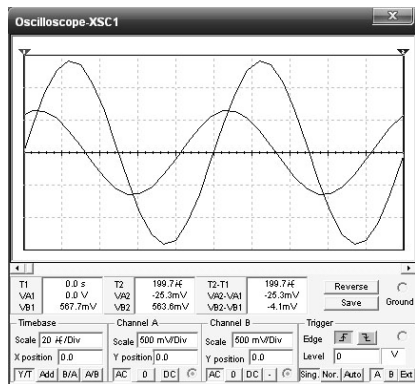
(3) 用示波器 XSC1 观察输入电压 V_1 和电路中电阻 R_1 的电压波形。示波器面板设置及显示的波形如图 4.67 所示。

当 $C_1 < C_{10}$ 时，容抗值大于感抗值，电路呈现电容性，因而电路中电流相位(与电阻 R_1 上电压同相)超前于电压相位，如图 4.67(a) 所示波形；当 $C_1 > C_{10}$ 时，容抗值小于感抗值，电路呈现电感性，因而电路中电流相位(与电阻 R_1 上电压同相)滞后于电压相位，如图 4.67(b) 所示波形。

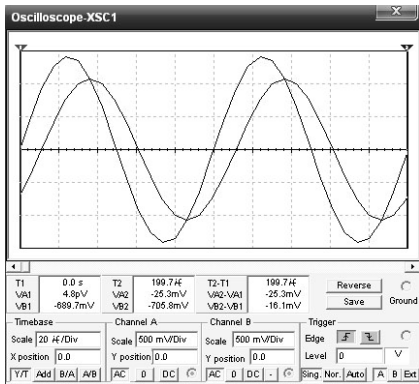
当 C_1 接近 C_{10} 时，电路发生谐振，电路中电流(与电阻 R_1 上电压同相)与电压同相位，电路中的电

压电流均达到最大值, 电阻电压与电压源电压有效值相等, 且电感和电容上电压有效值均高于电压源电压有效值。

(4) 将电路中的电阻 R_1 改为 $1\ \Omega$, 其他元件参数的选择不变, 建立仿真电路如图 4.68 所示。启动仿真, 按 A 或 a 键调节电容 C 的值, 使电路达到谐振状态。可以看到当电路中的电阻减小时, 电抗性元件的谐振电压明显增高了。



(a) $C_1 < C_{10}$ 时的波形



(b) $C_1 > C_{10}$ 时的波形

图 4.67 例 4.34 输入输出波形

理论上, 谐振电路的品质因数 Q 随电阻 R 的减小而增大, 而电路发生谐振时, 电抗性元件的电压是电压源电压的 Q 倍, 因此, 当 R 越小, 谐振电路的品质因数 Q 越大, 电抗性元件的谐振电压也随之变大, 理论分析与实验结果完全吻合。

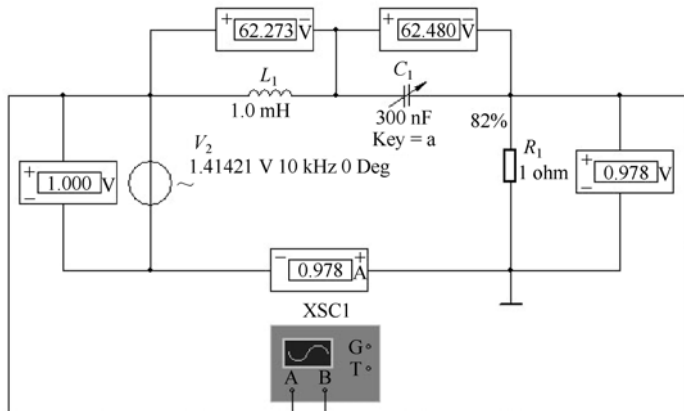


图 4.68 例 4.34 在 $R_1=1\ \Omega$ 时的谐振电路

4.10.2 用 Multisim 的 AC 频率扫描功能分析电路

运用 Multisim 可以进行正弦稳态电路的频率扫描分析 (AC Frequency Analysis)。在进行 AC 频率扫描分析时, Multisim 将电路中直流电源的作用视为零, 而将电路中所有起作用的交流电源视为同频率的正弦信号, 当频率在一定范围内变化时, 计算出电路中节点电压相量的幅度和相位, 并绘出幅度和相位随频率变化的曲线。用 Multisim 仿真时, 可以对交流电源的元件属性中在 “Analysis setup” 选项卡下勾选 “Use in AC Frequency Analysis” 功能, 则该交流电源就可以在 AC 频率扫描分析中起作用了。

例 4.35 用 Multisim 的 AC 频率扫描分析功能研究例 4.34 的谐振电路特性。

解：(1) 按图 4.66 所示建立仿真电路，调整电容 C1 使电路发生谐振。

(2) 选择 “Analysis” 菜单中 “AC Frequency” 命令，设定频率参数，如图 4.69 所示。其中，分析频率范围设定为 1 kHz 到 100 kHz，按照 10 倍频程的变化频率，垂直坐标刻度 (Vertical scale) 选择 linear。

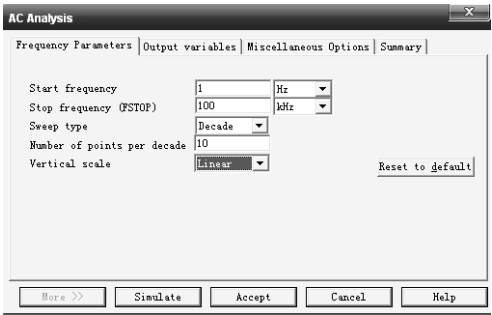
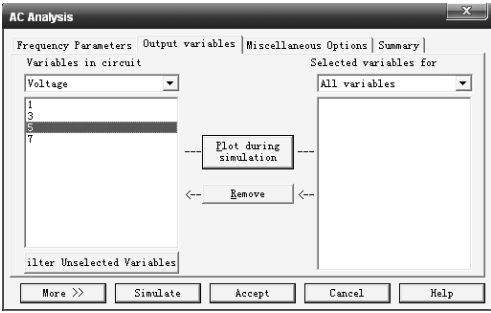
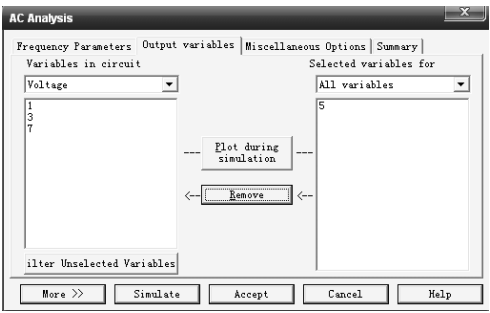


图 4.69 例 4.35 AC Frequency 频率参数的设置

(3) 进一步设定输出变量选项卡，如图 4.70 (a) 所示，从左边电路变量的选项中首先选择电压变量 Voltage，将电阻上的电压 (参考 ID 为 5，这个值可以在电压表的 label 选项卡里看到) 作为输出测试电压，选中 5 并单击 “Plot during simulation”，最后单击 “Accept” 按钮就设置好了输出测试变量，如图 4.70 (b) 所示。



(a) 选择电压变量作为输出变量的操作界面



(b) 输出变量设置好的界面

图 4.70 例 4.35 AC Frequency 输出变量的设置

(4) 启动分析 (在 AC Analysis 中单击 “Simulate” 按钮即可) 可以得到图 4.71 所示的两条分析曲线。可以很清楚地看到，在频率为 10 kHz 附近电阻电压的幅度最大，且此位置对应的相位曲线对应的相位近似为 0 这个结论与理论分析的谐振特性相吻合。

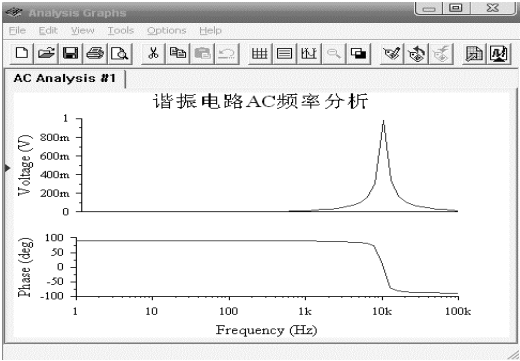


图 4.71 谐振电路 AC 频率分析

小结

1. 正弦量的特征和表示方法

随时间按正弦规律变化的量称为正弦量。正弦量可以用幅度(或有效值)、角频率(或频率)和初相三个要素表征。同频率的正弦量存在恒定的相位差，其相位差等于初相之差。

工程上用有效值表示周期信号的大小，周期信号的有效值是时域表达式的均方根值，正弦信号的有效值是最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍。

正弦量可以用三角函数式(瞬时表达式)、正弦(或余弦)波形、相量和相量图表示。相量是表征正弦量特征的复数，正弦电流可表示为

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \operatorname{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}]$$
$$i(t) \leftrightarrow \dot{I}_m$$

相量法是分析计算正弦交流电路的主要工具，要熟练掌握。只有同频率的正弦量才能进行相量计算，正弦量可用相量表征，但相量并不等于正弦量。

2. 简单电路在正弦信号激励下的基本性质

简单电路在正弦信号激励下的基本性质如表4.1所示。

表 4.1 简单电路在正弦信号激励下的基本性质

电 路					
相量模型					
电压电流 关系	相量关系	$\dot{U} = R\dot{I}$	$\dot{U} = jX_L\dot{I}$	$\dot{U} = -jX_C\dot{I}$	$\dot{U} = Z\dot{I}$ $Z = R + j(X_L - X_C)$
	大小关系	$U = RI$	$U = X_L I = \omega LI$	$U = X_C I = \frac{1}{\omega C} I$	$U = Z I$ $ Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$
	相位关系	 同相 $\varphi_u = \varphi_i$	 电压超前电流 90° $\varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$	 电压滞后电流 90° $\varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$	 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ $= \arctan \frac{X_L - X_C}{R}$

续表

功率计算	有功功率	$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$	$P = 0$	$P = 0$	$P = UI \cos \varphi = RI^2$
	无功功率	$Q = 0$	$Q = UI = X_L I^2$ $= \frac{U^2}{X_L}$	$Q = -UI = X_C I^2$ $= -\frac{U^2}{X_C}$	$Q = UI \sin \varphi$ $= (X_L - X_C)I^2$

3. 正弦稳态电路的分析与计算

正弦稳态电路的分析与计算主要围绕电压电流关系和功率计算这两方面。

在正弦稳态电路中，两类约束关系的相量形式为

$$\sum \dot{U} = 0, \quad \sum \dot{I} = 0, \quad \dot{U} = Z \dot{I}, \quad \dot{I} = Y \dot{U}$$

对同一无源二端网络的阻抗 Z 和导纳 Y 互为倒数，当阻抗串联时 $Z = \sum Z_k$ ，导纳并联时 $Y = \sum Y_k$ 。

使用相量法对正弦稳态电路进行分析的步骤：写出已知正弦量的相量；画正弦量的相量模型，仿照直流电阻电路的分析法求待求量的相量；写出待求量相量对应的时域表达式。

几个同频率的正弦量都用相量表示并画在同一个坐标系中，由此所构成的图称为相量图。绘制相量图依据的仍然是两类约束关系，相量图只需定性做出，作图时注意选择参考相量（初相为零），串联时宜选择电流相量为参考相量，并联时宜选用电压相量为参考相量。

正弦电路中，电流、电压随时间变化，瞬时功率也随时间变化。瞬时功率在一个周期的平均值即有功功率。电阻消耗有功功率 P ；电感和电容不消耗有功功率，但与电源之间存在着能量的相互交换，转换的规模用无功功率 Q 表示；视在功率 S 常用以表示电源设备的容量。它们的一般计算公式为

$$P = UI \cos \varphi, \quad Q = UI \sin \varphi, \quad S = UI$$

有功功率和视在功率的比值称为电路的功率因数，电路功率因数越小，所需视在功率越大，电压为额定值，所以电流越大，输电的损耗越大。因此，为了充分利用电源的供电能力，需提高电路的功率因数，实际应用中常用并联电容的方法来提高交流电路的功率因数。

当负载阻抗等于电源内阻抗的共轭复数时，称为共轭匹配，这时负载获得最大功率， $P_{\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0}$ ；当负载阻抗角固定而模可变时，可令负载的模等于电源内阻抗的模，以实现模匹配。

4. 电路的谐振

当正弦交流电路的电压与电流同相时电路处于谐振状态。谐振的实质就是电容中的电场能量与电感中的磁场能量相互转换、相互补偿，从而使电路呈纯电阻的性质。

电路发生谐振时，谐振角频率等于或接近

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

特性阻抗 ρ 和品质因数 Q 是谐振电路的固有参数，其定义式分别为

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$
$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

对于 RLC 串联电路，谐振时阻抗最小，电流最大，电压与电流同相，此时电流有效值为 $I = I_0 = \frac{U}{R}$ 。

串联谐振时电感和电容两端的电压相等, 相位相反, 大小为端电压的 Q 倍。

与串联谐振对偶, GLC 并联电路谐振时阻抗达最大值, 电流最小, 谐振时, 电感和电容上的电流相量大小相等, 相位相反, 其大小为输入电流有效值的 Q 倍。

电路发生谐振时将出现较大的电压或电流, 工程实际中应趋利避害。

5. 理想变压器

变压器是一种磁耦合器件, 由原边线圈和副边线圈构成。按照有无铁心, 可分为铁心变压器和空心变压器两种。空心变压器由两个物理上相互靠近的线圈组成, 理想变压器是含铁心的实际变压器经过理想化抽象得到的模型。

理想变压器具有电压变换、电流变换和阻抗变换性质, 其变换关系如下:

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{u_2} &= \frac{N_1}{N_2} = n \\ \frac{i_1}{i_2} &= -\frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{n} \\ Z_{11} &= \frac{\mathcal{U}_1^2}{P_1} = n^2 Z_{22}\end{aligned}$$

6. 三相电路

三相电路是交流复杂电路的一种特殊形式, 它的分析依据仍然是两类约束关系, 特殊性在于三相电源的电动势是对称的, 即三个绕组电动势的振幅、频率相等, 相位依次滞后 120° 。

三相电源和三相负载都有星形和三角形两种连接方式, 对于对称 Y-Y 连接的电路电源的线电压和相电压之间满足

$$\mathcal{U}_L = \sqrt{3}\mathcal{U}_P / 30^\circ$$

而线电流与相电流对应相等。对称 Y-Y 连接的电路以及不对称的带有中线的 Y-Y 连接的电路都可以化为每个单相回路计算各相电流。

对于三角形连接的负载, 每相负载的电压等于电源的线电压, 当三相负载对称时, 三个负载的相电流也对称, 线电流与相电流之间满足

$$\mathcal{I}_L = \sqrt{3}\mathcal{I}_P / -30^\circ$$

对称三相电路的瞬时功率是个常量, 等于平均功率, 其数值为每相功率的 3 倍。

习题 4

4.1 已知正弦电压 $u(t) = 100\cos(100t + 60^\circ)$ V, 正弦电流 $i(t) = 20\sqrt{2}\cos\left(314t - \frac{\pi}{4}\right)$ mA。试求:

- (1) $u(t)$ 和 $i(t)$ 的振幅、角频率、初相;
- (2) 做出 $u(t)$ 、 $i(t)$ 的波形图。

4.2 写出下列正弦电压或电流的瞬时值表达式:

- (1) $U_m = 10$ V, $\omega = 1000$ rad/s, $\varphi = 60^\circ$;
- (2) $U = 5$ V, $f = 50$ Hz, $\varphi = -60^\circ$;
- (3) $I_m = 2$ A, $\omega = 50$ rad/s, $\varphi = 150^\circ$;
- (4) $I = 10\sqrt{2}$ A, $f = 50$ Hz, $\varphi = -45^\circ$ 。

4.3 已知正弦电压 $u_{ab}(t) = 311\cos(314t + 60^\circ)$ V, 试求:

- (1) 振幅、初相、周期、频率和 $t=0$ 时的 $u_{ab}(t)$;
- (2) 求 $u_{ba}(t)$ 的表达式;
- (3) 画出 $u_{ab}(t)$ 的波形图。

4.5 $u(t)$ 和 $i(t)$ 为同频率正弦量, $f=50\text{ Hz}$, $U_m=100\text{ V}$, $I_m=2\text{ A}$, 已知 $u(t)$ 比 $i(t)$ 超前 $\frac{T}{6}$ 。

- (1) 求 $u(t)$ 与 $i(t)$ 的相位差;
- (2) 以 $u(t)$ 为参考正弦量, 写出 $u(t)$ 、 $i(t)$ 的瞬时式;
- (3) 以 $i(t)$ 为参考正弦量, 写出 $u(t)$ 、 $i(t)$ 的瞬时式。

4.6 写出下列各正弦量所对应的有效值相量:

- (1) $u(t)=100\sqrt{2}\cos(100t-30^\circ)\text{ V}$
- (2) $u(t)=10\cos(100t+60^\circ)\text{ V}$
- (3) $i(t)=2\cos\left(314t-\frac{\pi}{4}\right)\text{ A}$
- (4) $i(t)=15\sqrt{2}\cos 250t\text{ A}$

4.7 已知角频率 $\omega=10\text{ rad/s}$, 写出下列有效值相量对应的正弦量的函数式:

- (1) $\dot{U}=10\angle-30^\circ\text{ V}$
- (2) $\dot{U}=60\angle 140^\circ\text{ V}$
- (3) $\dot{I}=\frac{10}{1+j3}\text{ A}$
- (4) $\dot{I}=\frac{1+j3}{1-j3}\text{ A}$

4.8 电压 u 与电流 i_1 、 i_2 的相量图如图 4.72 所示, 已知 $\omega=1000\text{ rad/s}$, $U=220\text{ V}$, $I_1=10\sqrt{2}\text{ A}$, $I_2=8\text{ A}$ 。试分别用瞬时表达式和相量式(代数式、指数式和极坐标式)表示电压与电流。

4.9 给定正弦信号

$$u_1(t)=25\cos 100t\text{ V}$$

$$u_2(t)=50\cos(100t+45^\circ)\text{ V}$$

利用相量运算, 求出满足 $u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)=0$ 的 $u_3(t)$ 。

4.10 已知相量 $\dot{U}_1=(-4+j4)\text{ V}$, 利用相量运算找出超前 $u_1(t)$ 60° 且振幅为 10 V 、角频率为 100 rad/s 的正弦电压 $u_2(t)$ 。

4.11 图 4.73 所示电路中电流表 A_1 的读数为 8 A , A_2 的读数为 6 A 。试求: (1) 若 $Z_1=R$, $Z_2=-jX_C$, 则电流表 A_0 的读数为多少? (2) 若 $Z_1=R$, Z_2 为何参数, 电流表 A_0 的读数最大, 该最大值为多少? (3) 若 $Z_1=jX_L$, Z_2 为何参数, 电流表 A_0 的读数最小, 该最小值为多少? (4) 若 $Z_1=jX_L$, Z_2 为何参数, 可以使电流表 A_0 与 A_1 的读数相等且最小, 此时表 A_2 的读数为多少?

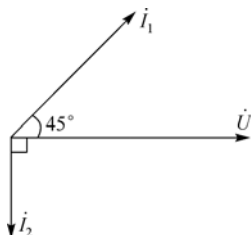


图 4.72

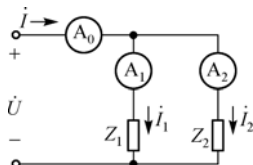


图 4.73

4.12 加到一个线性电路的电压是 $u(t)=200\cos(1000t+45^\circ)\text{ V}$, 在正弦稳态下电路中与 $u(t)$ 方向关联的输入电流为 $i(t)=20\cos 1000t\text{ mA}$ 。

- (1) 求电路输入端的等效阻抗;
- (2) 当 $u(t)=150\cos(1000t+90^\circ)\text{ V}$ 时, 求稳态电流 $i(t)$ 。

4.13 图 4.74 所示电路, 已知 $L_1 = \frac{1}{3} \text{ H}$, $L_2 = \frac{5}{6} \text{ H}$, $C = \frac{1}{3} \text{ F}$, $R = 2 \Omega$, $i(t) = \cos(3t + 45^\circ) \text{ A}$ 。求电路的等效阻抗 Z 和电压 u 。

4.14 图 4.75 所示电路, 已知 $u(t) = 220\sqrt{2} \cos 314t \text{ V}$, $i_1(t) = 22 \cos(314t - 45^\circ) \text{ A}$, $i_2(t) = 11\sqrt{2} \cos(314t + 90^\circ) \text{ A}$ 。求各仪表读数及电路的参数 R 、 L 和 C 。

4.15 在图 4.76 所示的正弦稳态电路中, 已知 $u(t) = 10 \cos 2t \text{ V}$, $i(t) = 2 \cos(2t - 60^\circ) \text{ A}$ 。试确定方框内最简串联组合和并联组合的元件值。

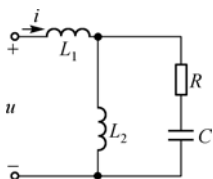


图 4.74

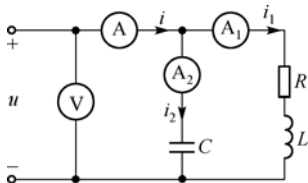


图 4.75

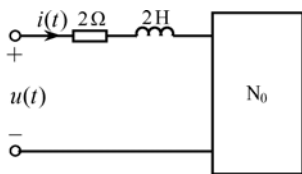


图 4.76

4.16 试求图 4.77 所示正弦稳态电路 ab 端等效阻抗 Z_{ab} 。

4.17 图 4.78 所示电路工作在正弦稳态, $\omega = 5 \text{ rad/s}$ 。

- (1) 计算使输入阻抗 Z 为纯电阻性的 C 值, 并求出阻抗值;
- (2) 用 Multisim 验证计算结果。

4.18 图 4.79 所示移相电路常用于可控硅触发电路中。

- (1) 试证明: 若 $R = \frac{1}{\omega C}$, 则电压 u_{ab} 的有效值为外施电压 u_o 有效值的一半, 且 u_{ab} 超前 u_o 90° ;
- (2) 试证明: 改变 R 值, 可改变 u_{ab} 对 u_o 的相位差角, 且其有效值不变。

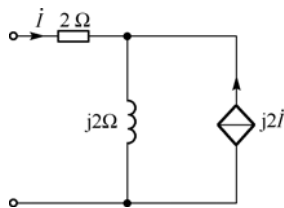


图 4.77

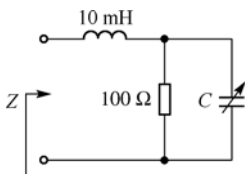


图 4.78

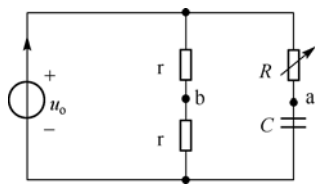


图 4.79

4.19 图 4.80 所示移相电路, 已知输入正弦电压 u_1 的频率 $f = 300 \text{ Hz}$, $R = 100 \Omega$ 。要求输出电压 u_2 的相位比 u_1 滞后 45° , 问电容 C 的值应该为多大? 如果频率增高, u_2 比 u_1 滞后的角度增大还是减小?

4.20 图 4.81 所示电路, 已知 $Z_1 = (20 + j100) \Omega$, $Z_2 = (50 + j150) \Omega$, 要求 i_2 滞后 i_1 90° , 求电阻 R 的值。

4.21 试分别列写图 4.82 所示正弦稳态电路的网孔方程和节点方程, 各图中的激励 $u_s(t) = 10 \cos 2t \text{ V}$, $i_s(t) = 0.5 \cos(2t - 30^\circ) \text{ A}$ 。

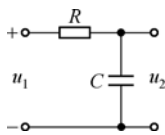


图 4.80

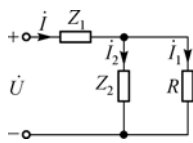


图 4.81

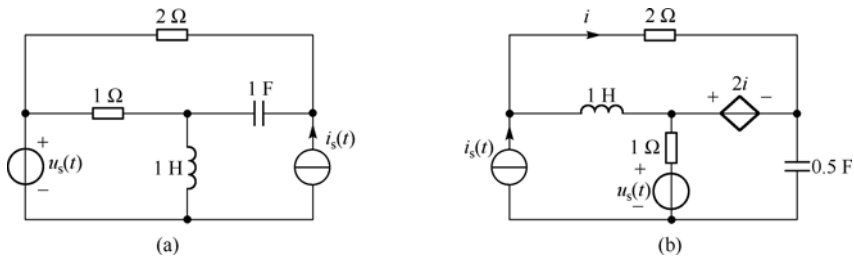


图 4.82

4.22 用网孔法求图 4.83 电路中响应相量 \dot{I} 。

4.23 已知: $u_{s1}(t) = 20 \cos 4000t \text{ V}$, $u_{s2}(t) = 50 \sin 4000t \text{ V}$ 用节点分析法求图 4.84 电路中的稳态电压 $u_x(t)$ 。

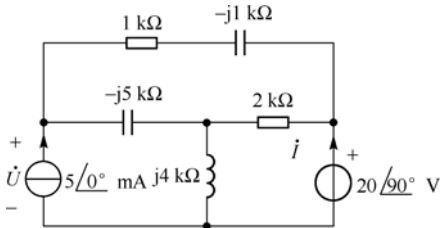


图 4.83

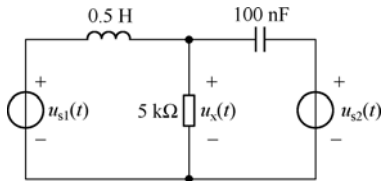


图 4.84

4.24 如图 4.85 所示正弦稳态电路, 用结点电压法求电路中的电流 \dot{I}_1 。

4.25 列写图 4.86 所示电路相量形式的结点电压方程。

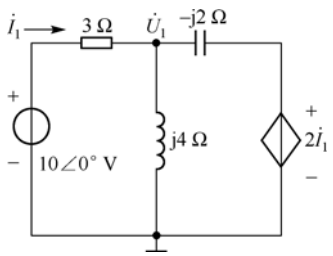


图 4.85

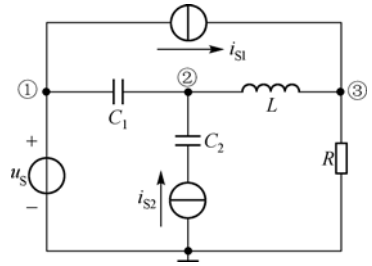


图 4.86

4.26 已知 $\omega = 5 \times 10^4 \text{ rad/s}$, 用叠加定理求图 4.87 所示正弦稳态电路中的 $u_x(t)$ 。

4.27 求出图 4.88 稳态电路中负载电阻左边电路的戴维南等效电路的相量模型。利用相量等效电路求出 500Ω 负载上电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 。

4.28 试求如图 4.89 所示有源二端网络的戴维南等效电路。

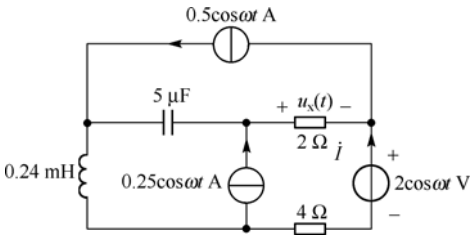


图 4.87

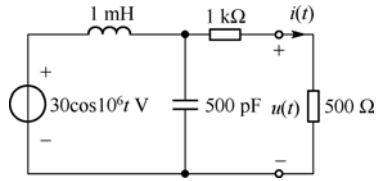


图 4.88

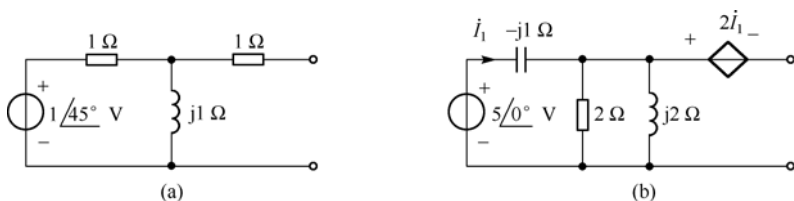


图 4.89

4.29 已知在关联参考方向下的无源二端网络的端口电压及电流分别为:

- (1) $u(t) = 3\cos 2t \text{ V}$, $i(t) = 2\cos 2t \text{ A}$;
- (2) $u(t) = 5\cos(314t + 85^\circ) \text{ V}$, $i(t) = 4\cos(314t + 55^\circ) \text{ A}$;
- (3) $u(t) = 10\cos(100\pi t + 10^\circ) \text{ V}$, $i(t) = 2\cos(100\pi t + 40^\circ) \text{ A}$ 。

试求各种情况下的 P 、 Q 、 S 。

4.30 如图 4.90 所示电路, 已知 $\dot{U}_{S1} = 110 \angle -30^\circ \text{ V}$, $\dot{U}_{S2} = 110 \angle 30^\circ \text{ V}$, $L = 1.5 \text{ H}$, $f = 50 \text{ Hz}$ 。求两个电源各自发出的有功功率和无功功率。

4.31 如图 4.91 所示正弦稳态电路, 已知 $\dot{I}_S = 1 \angle 10^\circ \text{ A}$ 。(1) 求 \dot{I}_R 、 \dot{I}_C 和 \dot{U} ; (2) 画出 \dot{I}_R 、 \dot{I}_C 、 \dot{I}_S 、 \dot{U}_1 、 \dot{U}_2 和 \dot{U} 的相量图; (3) 求电路的总有功功率和功率因数。

4.32 如图 4.92 所示, 三个负载 Z_A 、 Z_B 、 Z_C 并联在 $U = 100 \text{ V}$ 的交流电源上, 已知负载 Z_A 的电流为 10 A , 功率因数为 0.8 (滞后); 负载 Z_B 的电流为 2 A , 功率因数为 0.6 (超前); 负载 Z_C 的电流为 4 A , 功率因数为 1 ; 试求整个电路的有功功率、无功功率、视在功率及总电流。

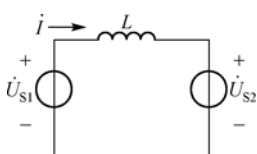


图 4.90

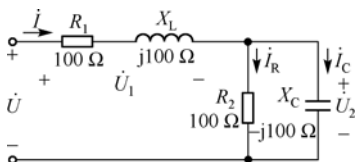


图 4.91

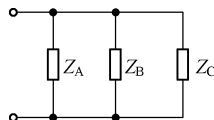


图 4.92

4.33 如图 4.93 所示电路, 已知外加交流电压 $U = 220 \text{ V}$, 频率 $f = 50 \text{ Hz}$, 接通电容器时测得电路的总功率 $P = 2 \text{ kW}$, 功率因数 $\cos \varphi = 0.866$ (感性); 若断开电容器支路后电路的功率因数 $\cos \varphi' = 0.5$ 。试求电阻 R 、电感 L 及电容 C 。

4.34 工厂中及自动控制中用的感应电动机是电感性负载, 功率因数较低, 为提高负载的功率因数, 可并联大小适当的电容器。设有一 220 V 、 50 Hz 、 50 kW 的感应电动机, 功率因数为 0.5 。

- (1) 问在使用时, 电源供应的电流是多少, 无功功率 Q 是多少?
- (2) 如果并联电容器, 使功率因数达到 1 , 问需要的电容器电容值是多少? 此时电源供应的电流是多少?

4.35 220 V 供给动力和照明用电, 电源频率为 50 Hz , 动力负载为 5 台 1.7 kW 的电动机, 功率因数为 0.8 (感性), 照明负载为 200 盏 40 W 电灯 (电阻性), 求总电流、总功率和功率因数, 欲将功率因数提到 1 , 可增添电容器, 求电容量 C 。

4.36 如图 4.94 所示, 若 Z_L 的实部、虚部均能变动, 若使 Z_L 获得最大功率, Z_L 应为何值, 最大功率为多少?

4.37 电路如图 4.95 所示, 求:

- (1) 获得最大功率时 Z_L 的取值;

- (2) 最大功率值;
- (3) 若 Z_L 为纯电阻, Z_L 获得的最大功率。

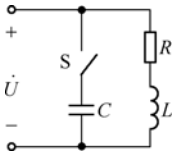


图 4.93

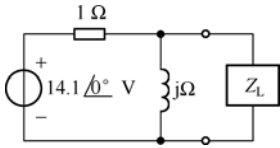


图 4.94

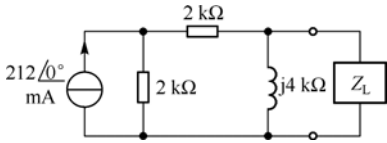


图 4.95

4.38 正弦稳态电路如图 4.96 所示, 已知 $U = 10\text{ V}$, $L = 20\text{ mH}$, $C = 200\text{ pF}$, $R = 100\text{ }\Omega$ 。求电路的谐振频率 f_0 、品质因数 Q 及发生谐振时的 U_L 、 U_C 是多少?

4.39 如图 4.97 所示是应用串联谐振原理测量线圈电阻 r 和电感 L 的电路, 已知 $R = 10\text{ }\Omega$, $C = 10\text{ }\mu\text{F}$ 。保持外加电压 U 的有效值为 10 V 不变, 改变频率 f , 同时用电压表测量电阻 R 的电压 U_R , 当 $f = 800\text{ Hz}$ 时, $U_{R\text{max}} = 0.8\text{ V}$ 。试求电阻 r 和电感 L 的参数。

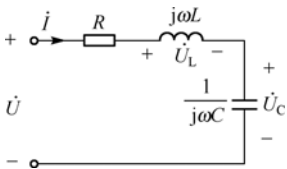


图 4.96

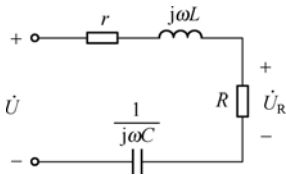


图 4.97

4.40 RLC 串联电路的信号源电压 $U = 2\text{ V}$, 当信号源频率为电路谐振频率 $f_0 = 100\text{ kHz}$ 时, 谐振电流 $I_0 = 100\text{ mA}$; 当频率变为 $f_1 = 99\text{ kHz}$ (电压有效值不变) 时, 电流 $I_1 = 70.7\text{ mA}$ 。试问信号源频率为 f_1 时, 电路是电感性还是电容性? 计算谐振时电路的品质因数 Q 及参数 R 、 L 、 C 。证明 RLC 串联电路的谐振频率 f_0 、通频带宽度 Δf 和品质因数 Q 之间的关系为

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

4.41 如图 4.98 所示电路处于谐振状态, 已知 $I_1 = I_2 = 10\text{ A}$, $U = 50\text{ V}$ 。求 R 、 X_L 、 X_C 的值。

4.42 如图 4.99 所示理想变压器电路中, 已知 $\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ\text{ V}$, 求电源电压 \dot{U}_s 。

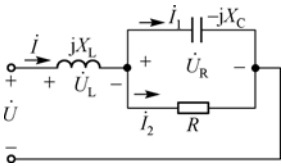


图 4.98

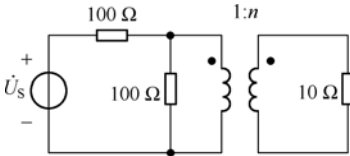


图 4.99

4.43 已知电路如图 4.100 所示, 试确定理想变压器的变比 n 使 $10\text{ }\Omega$ 电阻获得最大功率。

4.44 如图 4.101 所示电路中, $u_s(t)$ 和 R 已知。试求电压 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 和 $u_3(t)$ 。

4.45 已知三相电路中星形连接的三相负载每相阻抗 $Z = (12 + j16)\text{ }\Omega$, 接至对称三相电源, 其线电压为 380 V 。若端线阻抗忽略不计:

- (1) 试求线电流及负载吸收的功率;
- (2) 若将此三相负载改为三角形连接, 求线电流及负载吸收的功率。

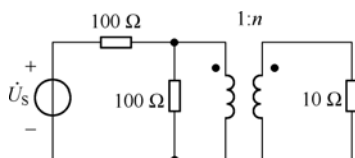


图 4.100

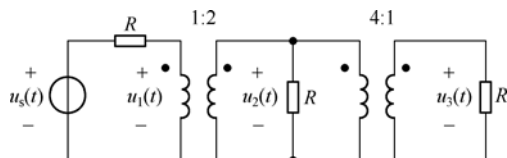


图 4.101

4.46 如图4.102所示的三相电路中, 已知 $Z_A = 48.4 \Omega$ 、 $Z_B = 48.4 \Omega$ 、 $Z_C = 242 \Omega$, 对称三相电源的相电压有效值为 220 V, 试求 \dot{I}_A 、 \dot{I}_B 、 \dot{I}_C 和 \dot{I}_0 。

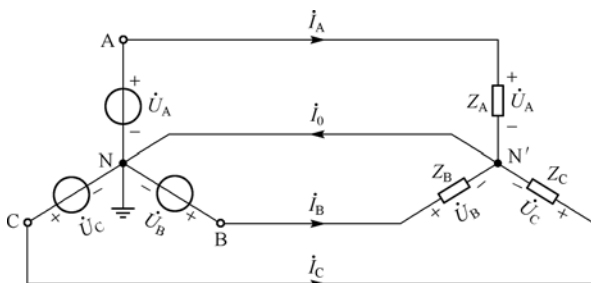


图 4.102

4.47 对称三相电路, 三相负载做星形连接, 各相负载阻抗 $Z = (3 - j4) \Omega$, 设对称三相电源线电压 $u_{AB} = 380\sqrt{2} \cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$ 。试求各相负载电流的瞬时值。

4.48 三相交流电动机绕组的额定电压为 220 V, 每相绕组的阻抗为 $Z = 22 \angle 36^\circ \Omega$, 实验室有两种电源电压: 线电压 380 V 和相电压 220 V。

- (1) 试问两种电源情况下电动机应如何连接;
- (2) 求两种电源情况下的相电流、线电流和有功功率。

第 5 章 信号与系统的频域分析

信号与系统的频域分析法，是指运用傅里叶级数展开(或傅里叶变换)将信号分解为多个正弦函数的和(或积分)，得到信号的频谱，然后求电路系统对各个正弦分量的响应，得到响应的频谱，最后经过傅里叶反变换求得响应的方法。频域分析法在电路与系统的分析中有着极其重要的意义，主要表现在以下三个方面，一是傅里叶变换将时域中的微分方程变换为频域中的代数方程，从而避开了微分方程的求解和卷积积分的计算，通过简单的代数运算就可以求得响应的频域解，最后经反变换得到系统的时域响应；二是频域分析法容易推广到复频域分析法，从而可以运用类似的方法来分析高阶复杂激励信号作用下的电路响应；三是利用信号频谱的概念便于说明和分析信号失真、滤波、调制等许多实际问题，从而获得清晰的物理概念。

本章首先介绍周期信号的傅里叶级数表示法及其频谱，接着着重介绍非周期信号的傅里叶变换及其频谱，通过对傅里叶变换性质的讨论更深刻地揭示信号的时域特性与频域特性间的内在联系，最后讨论频域分析方法在线性系统中的应用，并介绍工程应用中一些非常重要的概念，如无失真传输、理想滤波器等。

5.1 连续周期信号的傅里叶级数展开

将信号表示为不同频率的正弦分量的线性组合，称为信号的频谱分析，它是信号频域分析的基础。本节讨论连续周期信号的频谱分析方法，其数学工具是傅里叶级数，简称傅氏级数。

5.1.1 信号分类

信号的分类有很多种方法，按照分类的标准，大致有如表 5.1 所示的分类。

表 5.1 信号分类

分类标准	确定否	连续否	周期否	量化否	因果否	能量有限否	功率有限否
肯定时	确定性	连续	周期	量化	因果	能量有限	功率有限
否定时	随机性	离散	非周期	未量化	非因果	能量无限	功率无限

按照信号的变化规律是否确定，可分为确定性信号和随机性信号两种，确定性信号能用确定的数学函数表示，即对任一确定的时间(或空间)，信号有确定的函数值，如常见的多项式函数、三角函数、指数函数、对数函数等。随机信号的变化规律不能用确定的数学函数表示，只能用统计规律来描述。

按照信号的取值是否连续，有连续信号和离散信号两种。如果信号在一个(可能是无限的)时间区间内的每一时刻都能取值，即时间 t 取实数值，则称为连续时间信号，如图 5.1(a)、(b)、(c)、(e)、(f) 所示。图 5.1(d) 所示信号仅能在一个(可能是无限长的)时间区间内的某些时刻上取值，即时间 $t=n\Delta$ ，其中 n 为整数， Δ 为常数，则这种信号称为离散时间信号。

按照信号的取值是否具有重复规律，有周期信号和非周期信号两种。

在连续的时间信号中，如果每隔一定时间间隔 T ，信号按相同规律重复变化，则这种信号称为连续周期信号，其数学表达式可以表示为

$$f(t)=f(t+nT)$$

(5.1)

式(5.1)中 n 取整数, 满足该式的最小正周期 T 称为该信号的周期, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 称为该信号的角频率。图 5.1 (c)、(e) 所示均为连续周期信号。

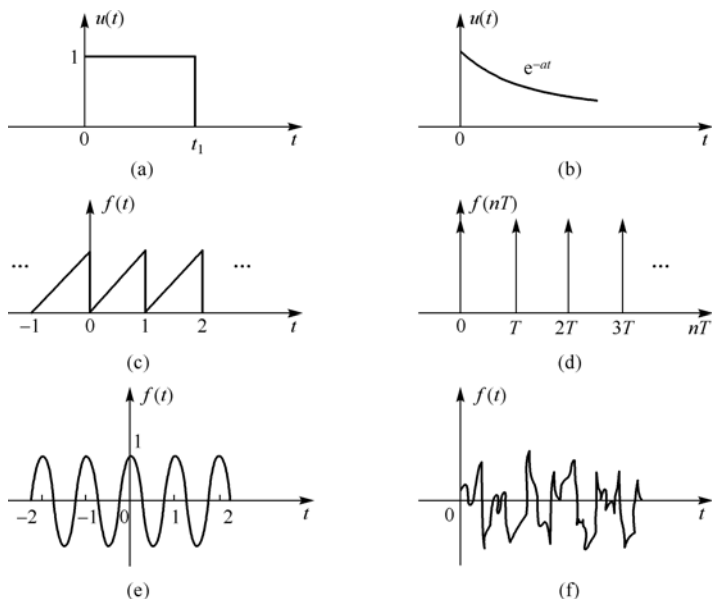


图 5.1 一些典型的连续时间信号和离散时间信号

如果信号在小于零的时刻都取零值, 则称为因果信号, 如图 5.1 (a)、(b)、(d)、(f) 所示。反之, 称为非因果信号, 如图 5.1 (c)、(e) 所示。显然, 因果信号一定是非周期信号。类似地, 如果信号在大于零的时刻都取零值, 则称为反因果信号。

如果信号在所有时刻的取值都有界, 即 $|f(t)| < +\infty$, 则称为有界信号, 反之称为无界信号。图 5.1 中的所有信号都为有界信号。

如果信号的能量有限, 即信号能量 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$, 则称为能量有限信号。反之称为能量无限信号。如果信号的功率有限, 即信号平均功率 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt < +\infty$, 则称为功率有限信号。能量有限信号一定是功率有限信号。然而, 功率有限信号不一定是能量有限信号。例如, $f(t) = \sin(t)$ 是功率有限信号, 却是能量无限信号。

5.1.2 周期信号分解为傅里叶级数

根据高等数学的知识, 当任何周期函数满足狄利克雷条件时, 即满足:

- (1) 在一个周期内绝对可积, 即 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$ 成立。
- (2) 在一个周期内只有有限个间断点。
- (3) 在一个周期内只有有限个极大或极小值。

则该周期函数可展开为一组正交函数的无穷级数之和。

1. 三角型傅里叶级数

三角函数集在一个周期内是完备的正交函数集, 使用三角函数集的周期函数展开就是傅里叶级数

展开。对于周期为 T_1 的周期信号 $f(t)$ ，其三角型傅里叶级数展开式为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \quad (5.2)$$

式中， $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi / T_1$ 是周期信号的角频率，也称为基波角频率； a_0 是直流分量； a_n 和 b_n 分别是余弦分量和正弦分量的幅度，又称为傅里叶系数，其计算公式为

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt & n = 1, 2, 3, L \\ b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt & n = 1, 2, 3, L \end{cases} \quad (5.3)$$

从数学角度上讲，周期信号满足狄利克雷条件才可以展开为傅里叶级数。在电子和通信等工程技术中出现的周期信号，一般都能满足这个条件，在下面的讨论中将不再注明此条件。

若将式(5.2)中同频率的正弦项和余弦项合并，周期信号的傅里叶级数展开还可以写成另一种紧凑的三角型傅里叶级数，即

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (5.4)$$

式(5.4)说明，任何周期信号只要满足狄利克雷条件，就可以分解成直流分量和一系列谐波分量之和，这些谐波分量的频率是周期信号基频的整数倍。其中， A_0 是信号中的直流分量； $A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ 为信号的 n 次谐波。当 $n=1$ 时， $A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ 为信号的基频分量，简称基波； n 比较大的谐波，称为高次谐波。比较式(5.4)和式(5.2)，可以看出两种表示形式的傅里叶级数的系数有如下关系：

$$\begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \\ a_n = A_n \cos \varphi_n, b_n = A_n \sin \varphi_n \end{cases} \quad (5.5)$$

2. 指数型傅里叶级数

我们知道，正弦量可以用指数形式表示，因此三角型傅里叶级数也可以用指数型级数表示。根据欧拉公式可得

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}, \quad \sin(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2j} \quad (5.6)$$

将式(5.6)代入式(5.2)，得到

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right)$$

令

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (n = 1, 2, 3L) \quad (5.7)$$

由式(5.3)可知， a_n 是 n 的偶函数， b_n 是 n 的奇函数，于是有

$$F_{-n} = \frac{1}{2}(a_{-n} - jb_{-n}) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (n=1, 2, 3L) \quad (5.8)$$

此外, 由式(5.7)和式(5.3)还可以得到

$$F_0 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt = a_0$$

如果将 n 的取值范围理解为 $(-\infty, +\infty)$ 的整数, 则

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n e^{jn\omega_1 t} + F_{-n} e^{-jn\omega_1 t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (5.9)$$

将式(5.5)代入 $F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ 中, 可以得到

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt - j \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) (\cos n\omega_1 t - j \sin n\omega_1 t) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{aligned} \quad (5.10)$$

式(5.9)称为指数型傅里叶级数, 可以看出指数型傅里叶级数比三角型傅里叶级数的公式更为紧凑。三角型傅里叶级数表示的物理意义比较明确, 指数型傅里叶级数在数学处理上更为简便, 而且容易与后面要学习的傅里叶变换统一起来。

三角型傅里叶级数的系数与指数型傅里叶级数的系数之间的转换关系如下:

$$F_0 = a_0 = A_0 \quad (5.11)$$

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (5.12)$$

式中

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \quad (5.13)$$

$$\varphi_n = \arctan(-b_n / a_n) \quad (5.14)$$

5.1.3 信号对称性与傅里叶系数的关系

把周期信号展开为傅里叶级数, 如果 $f(t)$ 的波形满足某种对称性, 则其傅里叶级数的某些系数为零, 从而使相应的项不存在。常见的对称信号有偶函数、奇函数、偶谐函数和奇谐函数信号等。下面说明这几种对称信号的对称性与傅里叶系数的特点。

1. 偶对称信号

若周期信号 $f(t)$ 的波形关于纵轴对称, 如图 5.2 所示, 即满足

$$f(t) = f(-t) \quad (5.15)$$

则 $f(t)$ 是偶信号, 其傅里叶级数展开式中只含有直流分量和余弦分量, 即

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t)$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad n=1,2,3,L$$

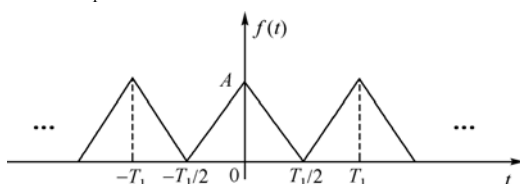


图 5.2 偶对称信号

2. 奇对称信号

若周期信号 $f(t)$ 的波形关于原点对称, 如图 5.3 所示, 即满足

$$f(t) = -f(-t) \quad (5.16)$$

此时 $f(t)$ 称为奇信号, 其傅里叶级数展开式中只含有正弦分量, 即

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

其中

$$b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad n=1,2,3,L$$

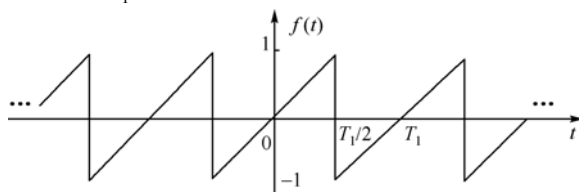


图 5.3 奇对称信号

3. 偶谐函数信号

若周期信号 $f(t)$ 波形沿时间轴平移半个周期后与原波形完全重叠, 如图 5.4 所示, 即满足

$$f(t) = f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) \quad (5.17)$$

则 $f(t)$ 称为偶谐函数信号, 其傅里叶级数展开式中只含有正弦项和余弦项的偶次谐波分量, 即

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

其中

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) dt \\ a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt & n=2,4,6,L \\ b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt & n=2,4,6,L \end{cases}$$

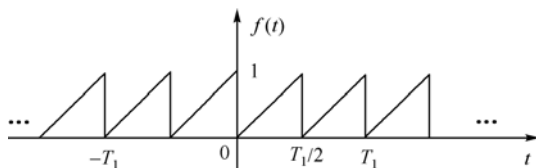


图 5.4 偶谐信号

4. 奇谐函数信号

若将周期信号 $f(t)$ 沿时间轴平移半个周期后的波形与原波形相对于时间轴镜像对称, 如图 5.5 所示, 即满足

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) \quad (5.18)$$

则 $f(t)$ 称为奇谐函数信号, 其傅里叶级数展开式中只含有正弦项和余弦项的奇次谐波分量, 即

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

其中

$$\begin{cases} a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt & n = 1, 3, 5, L \\ b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt & n = 1, 3, 5, L \end{cases}$$

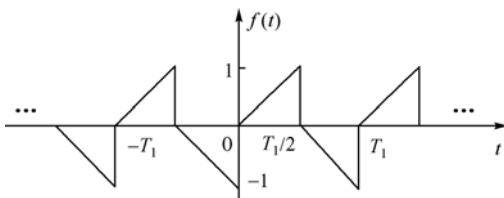


图 5.5 奇谐信号

可见, 通过对周期信号的对称性研究, 并利用奇函数与奇函数之积为偶函数、奇函数与偶函数之积为奇函数、奇函数在一个对称积分区间的积分为零等规律, 就可以对一些波形所包含的谐波分量预先做出判断, 使傅里叶级数系数的计算得以简化。

例 5.1 如图 5.6 所示的周期对称方波, 求其傅里叶级数展开式。

解: 由于 $f(t)$ 是奇函数, 其直流分量和余弦分量均为零, 即 $a_0 = 0$, $a_n = 0$, 根据式 (5.3), 则

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} A \sin(n\omega_1 t) dt \\ &= \frac{4A}{T_1} \left[\frac{-\cos(n\omega_1 t)}{n\omega_1} \right]_0^{T_1/2} = \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} & n = 1, 3, 5, L \\ 0 & n = 2, 4, 6, L \end{cases} \end{aligned}$$

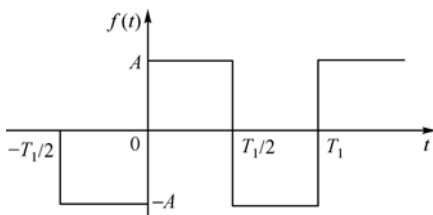


图 5.6 例 5.1 图

$f(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_1 t) + L \right]$$

例 5.2 如图 5.7 所示的周期锯齿波, 在一个周期内的表达式为 $f(t) = t (-\pi < t < \pi)$, 求其傅里叶级数展开式。

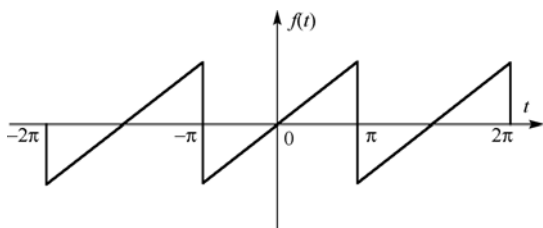


图 5.7 例 5.2 图

解: $f(t)$ 是奇函数, 其直流分量和余弦分量均为零, 即 $a_0 = 0, a_n = 0$, 根据式 (5.3), 则

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{t \cos nt}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n} dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin nt}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

$f(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \sin(n\omega_1 t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times (-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$$

例 5.3 如图 5.8 所示的周期三角波, 在一个周期内的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$$

求其傅里叶级数展开式。

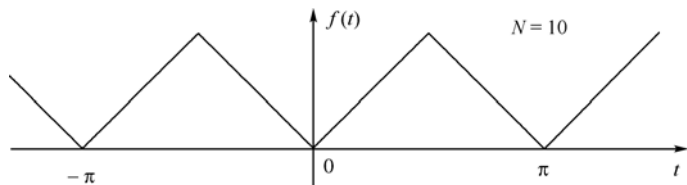


图 5.8 例 5.3 图

解: 由于 $f(t)$ 是偶函数, 其正弦分量为零, 即 $b_n = 0$, 根据式 (5.3), 则

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t dt = \frac{\pi}{4} \\ a_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \cos 2nt dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{\pi} \left(t \times \frac{\sin 2n\pi}{2n} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nt}{2n} dt \\
 &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2nt}{4n^2} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos n\pi}{\pi n^2}
 \end{aligned}$$

因此傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(4n-2)t]$$

5.2 连续周期信号的频谱

为了方便和明确地表示一个周期信号中所含有的频率分量以及各频率分量所占的比重,即直观地表征不同信号的谐波组成情况,常画出周期信号各个频率分量的振幅及相位沿频率轴分布的图形,这种图形称为信号的频谱图。信号的频谱图包括幅度频谱图和相位频谱图,其中,傅里叶系数的幅度 $|F_n|$ 或 A_n 随角频率 $n\omega_1$ 的变化图形称为幅度频谱,而相位 φ_n 随频率 $n\omega_1$ 的变化图形称为相位频谱。根据周期信号展开成傅里叶级数的不同形式,频谱图又分为单边频谱图和双边频谱图。

5.2.1 单边频谱

若周期信号 $f(t)$ 的三角函数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

则 A_n 与 $n\omega_1$ 的关系称为单边幅度频谱, φ_n 与 $n\omega_1$ 的关系称为单边相位频谱,二者合在一起简称为周期信号 $f(t)$ 的单边频谱图。

例 5.4 一个周期锯齿波的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \left[\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(4\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right]$$

试画出该信号的单边频谱图。

解: 根据定义,可画出该周期锯齿波的单边幅度频谱和单边相位频谱,分别如图5.9(a)、(b)所示。

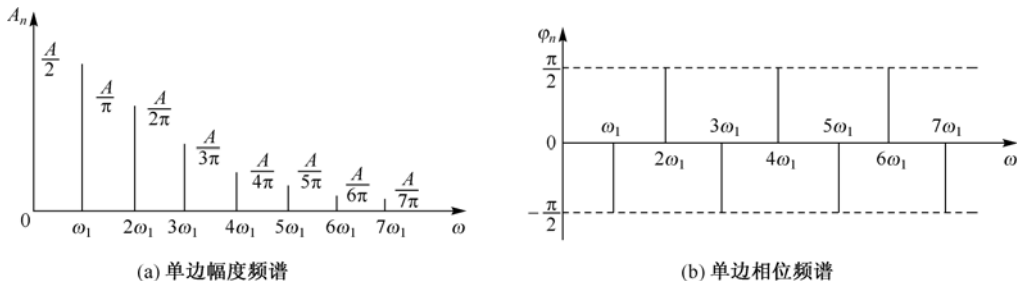


图 5.9 例 5.4 信号的单边频谱

例 5.5 一个周期方波的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_1 t) + L \right]$$

试画出该信号的单边频谱图。

解：首先将傅里叶级数展开式中的正弦函数表示成余弦函数形式，即

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{7} \cos\left(7\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + L \right]$$

根据上式可绘出相应的单边幅度频谱和单边相位频谱，分别如图 5.10(a)、(b) 所示。

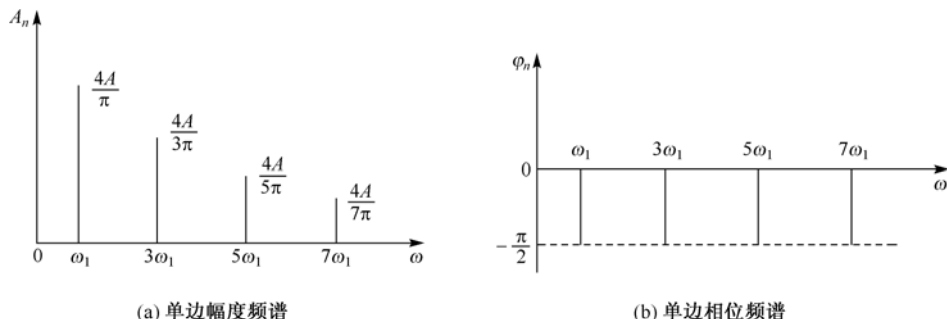


图 5.10 例 5.5 信号的单边频谱

5.2.2 双边频谱

若将周期信号 $f(t)$ 展开为指数型傅里叶级数，即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

式中

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

由于 n 为 $-\infty \sim +\infty$ 的整数， $f(t)$ 对应的频谱图在频率轴的正、负频率各边均有谱线，因此，幅度 $|F_n|$ 与 $n\omega_1$ 的关系称为双边幅度频谱，相位 φ_n 与 $n\omega_1$ 的关系称为双边相位频谱，二者合在一起简称为周期信号 $f(t)$ 的双边频谱图。

例 5.6 画出例题 5.4 中的函数 $f(t)$ 的双边频谱图。

解：周期锯齿波的三角型傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \left[\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(4\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + L \right]$$

根据式(5.11)，可得

$$F_0 = a_0 = \frac{A}{2}$$

再由式(5.12)，可分别求出各次谐波分量对应的指数型傅里叶系数，即

$$F_1 = |F_1| e^{j\varphi_1} = \frac{1}{2} A_1 e^{j\varphi_1} = \frac{A}{2\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$F_{-1} = |F_{-1}| e^{j\varphi_{-1}} = \frac{1}{2} A_{-1} e^{j\varphi_{-1}} = \frac{A}{2\pi} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$F_2 = |F_2| e^{j\varphi_2} = \frac{1}{2} A_2 e^{j\varphi_2} = \frac{A}{4\pi} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$F_{-2} = |F_{-2}| e^{j\varphi_{-2}} = \frac{1}{2} A_2 e^{j\varphi_{-2}} = \frac{A}{4\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$F_3 = |F_3| e^{j\varphi_3} = \frac{1}{2} A_3 e^{j\varphi_3} = \frac{A}{6\pi} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$F_{-3} = |F_{-3}| e^{j\varphi_{-3}} = \frac{1}{2} A_3 e^{j\varphi_{-3}} = \frac{A}{6\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$F_4 = |F_4| e^{j\varphi_4} = \frac{1}{2} A_4 e^{j\varphi_4} = \frac{A}{8\pi} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$F_{-4} = |F_{-4}| e^{j\varphi_{-4}} = \frac{1}{2} A_4 e^{j\varphi_{-4}} = \frac{A}{8\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

由此可画出双边幅度频谱和双边相位频谱分别如图 5.11 所示。

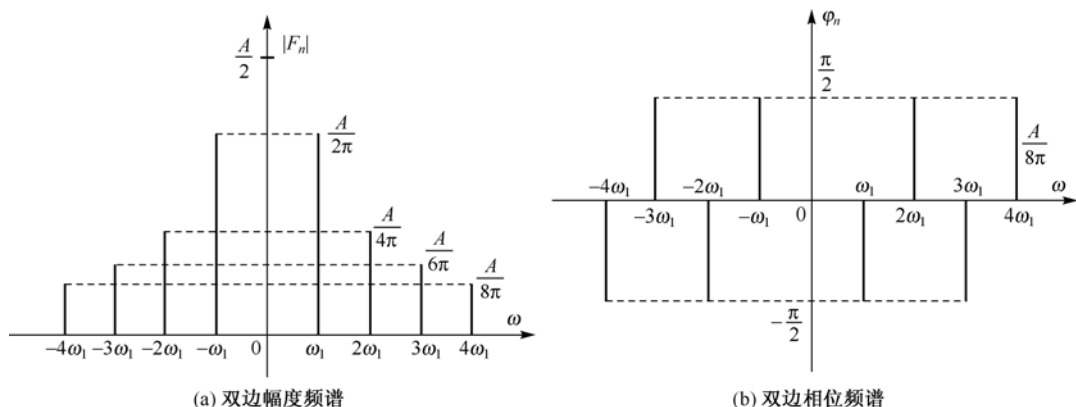


图 5.11 例 5.6 双边频谱图

5.2.3 典型矩形脉冲信号的频谱

1. 周期矩形脉冲信号的频谱

周期矩形脉冲信号在电信技术中应用很广。图 5.12 所示为一个脉宽为 τ ，脉冲幅度为 A ，重复周期为 T_1 的周期矩形脉冲信号，该信号在一个周期内的表达式为

$$f(t) = A \left[\varepsilon\left(t + \frac{T_1}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{T_1}{2}\right) \right]$$

其指数型傅里叶系数为

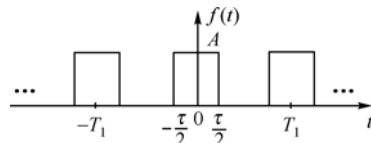


图 5.12 周期矩形脉冲信号

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{A}{T_1} \cdot \frac{1}{(-jn\omega_1)} (e^{-jn\omega_1 \tau/2} - e^{jn\omega_1 \tau/2}) \\
 &= \frac{2A}{T_1 n \omega_1} \cdot \sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) = \frac{A\tau}{T_1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right)}{\frac{n\omega_1 \tau}{2}} = \frac{A\tau}{T_1} \cdot \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

式 (5.19) 中，函数 $\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$ 称为采样函数，其波形如图 5.13 所示。

观察图 5.13, 可以发现采样函数有如下特点:

(1) $\text{Sa}(x)$ 是偶函数。

(2) 除了 $x=0$ 外, $\text{Sa}(x)$ 的过零点与 $\sin x$ 类似, 即在

$$x=k\pi \quad (k \in \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

时, $\text{Sa}(x)=0$

$$(3) \quad \text{Sa}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1。$$

(4) $\text{Sa}(x)$ 随着 x 的增大其幅度按 $1/x$ 的规律单调衰减并趋于 0。

由式(5.19)可知, F_n 为实数, 当 $n>0$, 且满足

$$n\omega_1 \in \left(\frac{4k\pi}{\tau}, \frac{2(2k+1)\pi}{\tau} \right) \quad k=0,1,2,L$$

时, $F_n>0$, F_n 对应的相位为 0; 当 $n>0$, 且满足

$$n\omega_1 \in \left(\frac{2(2k+1)\pi}{\tau}, \frac{4(k+1)\pi}{\tau} \right) \quad k=0,1,2,L$$

时, $F_n<0$, F_n 对应的相位为 π ; 对称的, 当 $n<0$, 且满足

$$n\omega_1 \in \left(-\frac{2(2k+1)\pi}{\tau}, -\frac{4k\pi}{\tau} \right) \quad k=0,1,2,L$$

时, $F_n>0$, F_n 对应的相位为 0; 当 $n<0$, 且满足

$$n\omega_1 \in \left(-\frac{4(k+1)\pi}{\tau}, -\frac{2(2k+1)\pi}{\tau} \right) \quad k=0,1,2,L$$

时, $F_n<0$, F_n 对应的相位为 $-\pi$ 。

根据上述讨论可画出周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的双边幅度频谱图和相位频谱图, 分别如图 5.14(a)、(b) 所示。由于 $f(t)$ 的指数型傅里叶系数 F_n 为实数, 且 $f(t)$ 各谐波分量的相位为 0 或 $\pm\pi$, 也可将幅度频谱和相位频谱合在一幅图中, 用于表示 F_n 与 $n\omega_1$ 的关系, 如图 5.14(c) 所示。

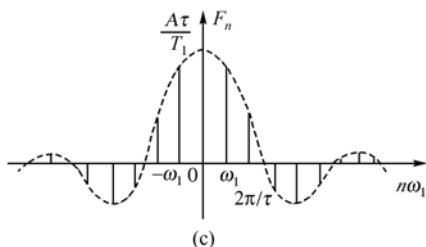
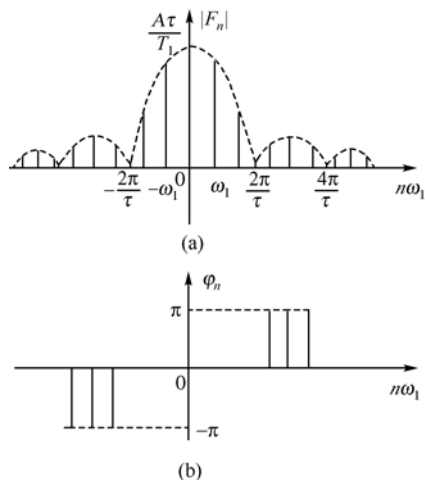


图 5.14 周期矩形脉冲的双边频谱图

2. 周期信号频谱的特点

从图 5.14 所示的周期矩形脉冲的频谱中, 可以得出如下特性:

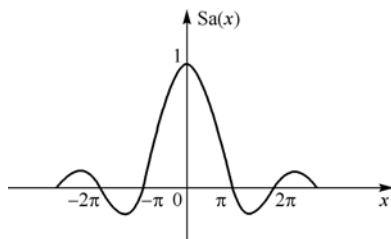


图 5.13 采样函数的波形

(1) 离散性。指频谱由频率离散而不连续的谱线组成, 这种频谱称为离散频谱或线谱。由于 n 只能取整数, 图 5.14 中的频谱只能是由一根根在离散频率上的谱线组成的离散频谱。

(2) 谐波性。指各次谐波分量的频率都是基波频率 ω_1 的整数倍, 而且相邻谐波的频率间隔是均匀的, 即谱线在频率轴上的位置是 ω_1 的整数倍。

(3) 收敛性。指谱线幅度随 $n \rightarrow \infty$ 而衰减到零。因此这种频谱具有收敛性或衰减性。

除了少数特例外, 所有周期信号的频谱都具有离散性、谐波性和收敛性这三个特点。在实际工作中, 信号的频谱可以通过频谱分析仪测量得到。

3. 周期信号的有效频谱宽度

若矩形脉冲信号 $f(t)$ 的脉冲幅度为 A 、脉冲宽度为 τ 、重复周期为 T_1 , 则重复角频率为 $\omega_1 = 2\pi/T_1$, 从其频谱图 5.14(c) 可以看出:

(1) 周期矩形脉冲信号的频谱是离散的, 两谱线的间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ 。

(2) 直流分量、基波及各次谐波分量的大小正比于脉冲幅度 A 和脉冲宽度 τ , 反比于周期 T_1 , 其变化包络线受函数 $\sin x/x$ 的制约。

(3) 当 $\omega = 2k\pi/\tau (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 谱线的包络线过零点。因此, $\omega = 2\pi/\tau$ 称为零分量频率。

(4) 周期矩形脉冲信号包含无限多条谱线, 它可以分解为无限多个频率分量, 但其主要能量却集中在第一个零分量频率之内。因此, 通常把 $0 \sim 2\pi/\tau$ 这段频率范围称为矩形脉冲信号的有效频谱宽度或信号占有频带, 记为

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{或} \quad B_f = \frac{1}{\tau} \quad (5.20)$$

显然, 有效频谱宽度与脉冲宽度成反比。有效频谱宽度是研究信号与系统频率特性的重要内容, 要使信号通过线性系统传输, 就必须要求系统本身所具有的频率特性与信号的频带宽度相适应。

4. 周期信号的脉冲宽度和周期对频谱的影响

当周期矩形信号的周期 T_1 不变时, 改变脉冲宽度 τ , 此时谱线间隔 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ 不变, 而信号频谱中的第一个零分量频率 $\omega = 2\pi/\tau$ 随 τ 的减小而增大, 即信号的频带宽度增大, 并且各次谐波的振幅减小, 即振幅收敛速度变慢。反之, 若 τ 增大, 则信号的频带宽度减少, 各次谐波的振幅收敛速度变快, 如图 5.15 所示。

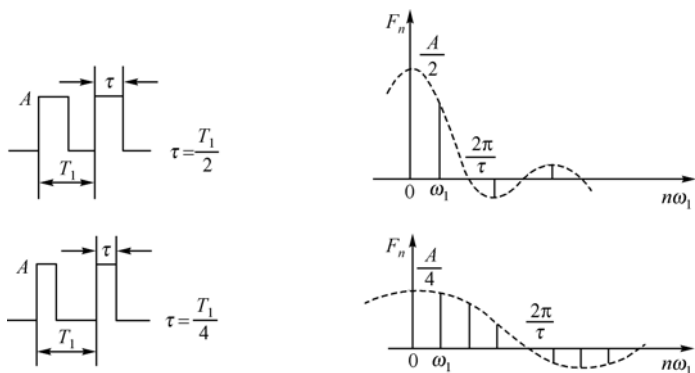


图 5.15 周期 T_1 不变, 周期矩形脉冲的频谱随脉冲宽度 τ 的变化

当周期矩形信号的脉冲宽度 τ 保持不变, 增大周期 T_1 , 则可以看出:

(1) 因 τ 不变, 零分量频率 (如 $\omega = 2\pi/\tau$) 的位置不变, 信号的有效频谱宽度也不变。

- (2) 离散谱线的间隔 $\omega_1 = 2\pi / T_1$ 变小, 即谱线变得更加密集。
 (3) 各谱线的幅度 $A\tau / T_1$ 变小, 包络线变化缓慢, 即振幅收敛速度变慢。

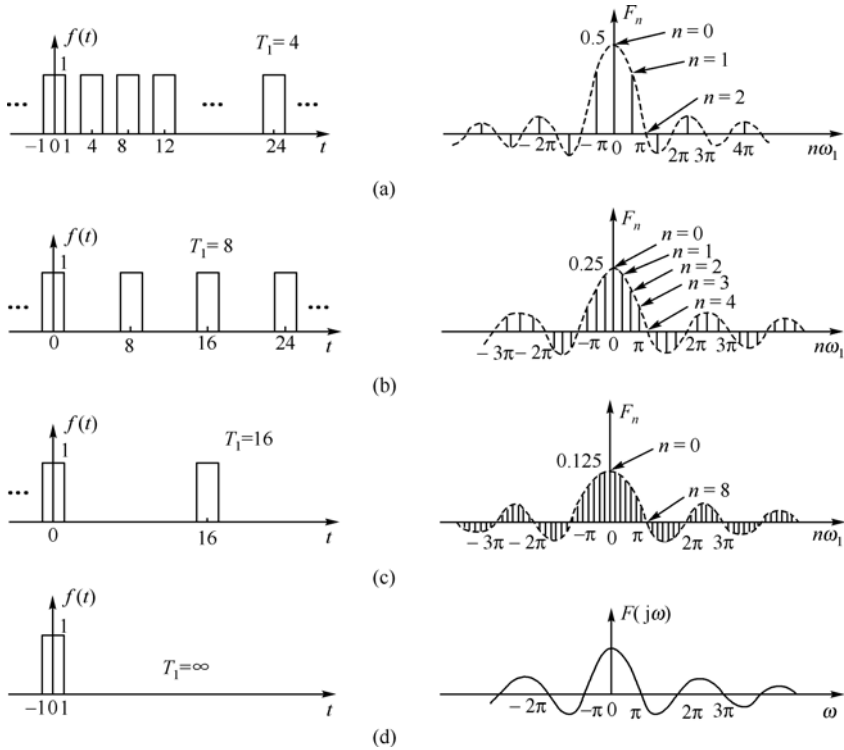


图 5.16 脉冲宽度 τ 相同而周期 T_1 不同的周期矩形脉冲的频谱

图5.16给出了脉冲宽度 τ 相同而周期 T_1 不同的周期矩形脉冲信号的频谱。由图可见, 这时频谱包络线的零点所在位置不变, 而当周期 T 增大时, 频谱线变密集, 即在信号占有频带内谐波分量增多, 同时振幅减小。当周期无限增大时, $f(t)$ 变为非周期信号, 相邻谱线间隔趋近于零。相应振幅趋于无穷小量, 从而周期信号的离散频谱过渡到非周期信号的连续频谱, 这将在 5.3 节中讨论。

5.2.4 傅里叶级数在电路分析中的应用

1. 非正弦周期信号的有效值

若任一周期信号 $i(t)$ 对应的傅里叶级数展开式为

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k) + \dots$$

则非正弦周期电流的有效值 I 为

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_0 + I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k) + \dots]^2 dt} \end{aligned}$$

上式积分号内直流分量与各次谐波之和的平方展开结果有以下四种类型:

$$(1) \quad \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2$$

$$(2) \quad \frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \cos^2(k\omega t + \varphi_k) dt = \frac{I_{km}^2}{2} = I_k^2$$

$$(3) \quad \frac{1}{T} \int_0^T 2I_0 I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k) dt = 0$$

$$(4) \quad \frac{1}{T} \int_0^T 2I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k) I_{qm} \cos(q\omega t + \varphi_q) dt = 0 \quad (k \neq q)$$

因此, 信号 $i(t)$ 的有效值可按式计算:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots} \quad (5.21)$$

同理, 非正弦周期电压的有效值为

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots} \quad (5.22)$$

因此, 非正弦周期电流和电压的有效值等于直流分量与各次谐波有效值平方和的平方根。各次谐波有效值与最大值之间的关系为

$$I_k = \frac{I_{km}}{\sqrt{2}}, \quad U_k = \frac{U_{km}}{\sqrt{2}}$$

例 5.7 已知周期电流的傅里叶级数展开式为

$$i(t) = 100 - 63.7 \cos \omega t - 31.8 \cos 2\omega t - 21.2 \cos 3\omega t \text{ A}$$

求其有效值。

解: 直流分量及各次谐波分量对应的有效值分别为

$$I_0 = 100 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{63.7}{\sqrt{2}} = 45 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{31.8}{\sqrt{2}} = 22.5 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{21.2}{\sqrt{2}} = 15 \text{ A}$$

则

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} = \sqrt{100^2 + 45^2 + 22.5^2 + 15^2} = 112.9 \text{ A}$$

2. 非正弦周期信号电路中的平均功率

非正弦周期电流通过负载时, 负载要消耗功率。

若负载两端的电压 $u(t)$ 和流过的电流 $i(t)$ 按照关联参考方向假定, 则负载吸收的瞬时功率为

$$p = ui$$

负载吸收的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt$$

将电压和电流展开成傅里叶级数, 有

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ku})$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \phi_{ki})$$

则二端网络吸收的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{ku}) \right] \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{ki}) \right] dt$$

将上式积分号内的乘积展开, 分别计算各乘积项在一个周期内的平均值, 有以下五种类型项:

$$(1) \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0$$

$$(2) \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_{km} I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{ku}) \cos(k\omega t + \varphi_{ki}) dt = \frac{1}{2} U_{km} I_{km} (\varphi_{ku} - \varphi_{ki}) = U_k I_k \cos \varphi_k$$

$$(3) \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{ki}) dt = 0$$

$$(4) \quad \frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{ku}) dt = 0$$

$$(5) \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{ku}) I_{qm} \cos(q\omega t + \varphi_{qi}) dt = 0 \quad (k \neq q)$$

因此, 二端网络吸收的平均功率可按下式计算:

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots \end{aligned} \quad (5.23)$$

必须注意, 只有相同频率的谐波电压和电流才能构成平均功率, 不同频率的谐波电压和电流不能构成平均功率, 也不等于端口电压的有效值与端口电流有效值的乘积。

例 5.8 流过 5Ω 电阻的电流为 $i = 10 + 28.28 \cos t + 14.14 \cos 2t$ A, 求其平均功率。

解: 直流分量及各次谐波分量对应的电流有效值分别为

$$I_0 = 10 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{28.28}{\sqrt{2}} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{14.14}{\sqrt{2}} \text{ A}$$

则

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + P_2 = I_0^2 R + I_1^2 R + I_2^2 R = R(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2) \\ &= 5 \times \left[10^2 + \left(\frac{28.28}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{14.14}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = 3000 \text{ W} \end{aligned}$$

例 5.9 某二端网络的电压和电流分别为

$$u = 100 \cos(\omega t + 30^\circ) + 50 \cos(3\omega t + 60^\circ) + 100 \cos 5\omega t \text{ V}$$

$$i = 4 \cos(\omega t - 30^\circ) + 5 \cos(3\omega t + 30^\circ) + 2 \cos(5\omega t - 30^\circ) \text{ A}$$

求其平均功率。

解: 基波功率为

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{\sqrt{2}} \cos 60^\circ = 100 \text{ W}$$

三次谐波的功率为

$$P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \frac{50}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \cos 30^\circ = 108.2 \text{ W}$$

五次谐波的功率为

$$P_5 = U_5 I_5 \cos \varphi_5 = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \cos 30^\circ = 86.6 \text{ W}$$

总的平均功率为

$$P = P_1 + P_3 + P_5 = 100 + 108.2 + 86.6 = 294.8 \text{ W}$$

3. 非正弦周期电路的分析

当电路的激励为周期性非正弦信号时, 采用傅里叶级数可以将其分解为直流分量与一系列频率不同的正弦分量的叠加, 接着按照直流电路、正弦交流电路的分析法及叠加定理, 就可以对非正弦周期信号激励下稳态电路进行分析和计算。一般的分析步骤如下:

(1) 把给定的非正弦输入信号分解成直流分量和各次谐波分量, 并根据精度的具体要求取前几项。

(2) 分别计算各谐波分量单独作用于电路时的电压和电流。但要注意电容和电感对各次谐波表现出来的感抗和容抗的不同, 对于 k 次谐波有

$$X_{kL} = k\omega L$$

$$X_{kC} = \frac{1}{k\omega C}$$

(3) 应用线性电路的叠加原理, 将各次谐波作用下的电压或电流的瞬时值进行叠加。应注意的是, 由于各次谐波的频率不同, 不能用相量形式或复数形式进行叠加。

例 5.10 设图 5.17(a) 所示电路中, $u_{S1} = 10 \text{ V}$, $u_{S2} = 20\sqrt{2}\cos\omega t \text{ V}$, $i_S = (2 + 2\sqrt{2}\cos\omega t) \text{ A}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 。求:

- (1) 求电流源的端电压及有效值;
- (2) 求电流源发出的平均功率。

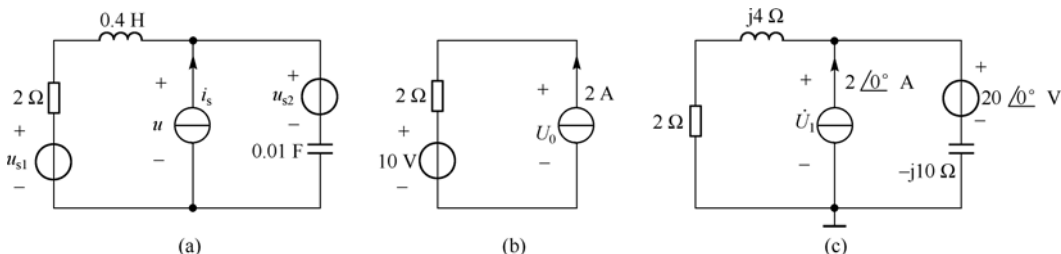


图 5.17 例 5.10 图

解: 首先求直流分量作用于电路时的响应, 将电感短路, 电容开路, 作直流电路等效模型如图 5.17(b) 所示。电流源端电压中直流分量为

$$U_0 = (10 + 2 \times 2) = 14 \text{ V}$$

频率为 ω 的正弦信号分量的激励下, 电路的相量模型如图 5.17(c) 所示。用节点法求电流源端电压相量为

$$\left[\frac{1}{2 + j4} + \frac{1}{-j10} \right] \dot{U}_1 = \frac{20}{-j10} + 2$$

化简得

$$[0.1 - j0.1] \dot{U}_1 = 2 + j2$$

因此

$$U_1 = 20 \angle 90^\circ \text{ V}$$

电流源的端电压瞬时表达式为

$$u = U_0 + u_1 = [14 + 20\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ)] \text{ V}$$

电流源的端电压有效值为

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2} = \sqrt{14^2 + 20^2} = 24.4 \text{ V}$$

电流源发出的平均功率为

$$P = 14 \times 2 + 20 \times 2 \cos 90^\circ = 28 \text{ W}$$

5.3 连续非周期信号的傅里叶变换

一个周期信号在一定条件下,可展开成一系列谐波频率分量之和,信号各次谐波的组成可用频谱图形形象地表示出来。同样对于连续非周期信号,在满足一定条件时,也可以运用傅里叶变换做类似的研究。

5.3.1 非周期信号的傅里叶变换

1. 从傅里叶级数到傅里叶变换

对于周期信号 $f(t)$, 已经知道其指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (5.24)$$

式中,

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (5.25)$$

将式(5.25)改写为

$$F_n T_1 = \frac{2\pi F_n}{\omega_1} = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (5.26)$$

当 $f(t)$ 的周期 T_1 趋近于无穷大时,由上节讨论可知,谱线间隔趋近于无穷小,谱线无限地密集而变为连续频谱,即 $T_1 \rightarrow \infty$, $\omega_1 \rightarrow d\omega$, $n\omega_1 \rightarrow \omega$, 此时记为

$$F(j\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} F_n T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.27)$$

$F(j\omega)$ 称为频谱密度函数,简称频谱函数,其意义为单位频率上的谐波幅度。

将 $F_n = \frac{F(j\omega)}{T_1} = \frac{F(j\omega)\omega_1}{2\pi}$ 代入式(5.24), 同样在极限 $T_1 \rightarrow \infty$, $\omega_1 \rightarrow d\omega$, $n\omega_1 \rightarrow \omega$ 下, 式(5.24)变成

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega)}{2\pi} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.28)$$

式(5.28)表明,一个非周期信号本质上是由无限多个幅度为无限小的复指数函数构成,而其中每一个分量的复振幅为 $\frac{F(j\omega)}{2\pi} d\omega$ 。

2. 傅里叶变换的定义

根据傅里叶变换理论, 任何非周期连续信号, 当满足狄利克雷条件, 即满足

(1) 在一个周期内绝对可积, 即 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$ 成立;

(2) 在一个周期内只有有限个间断点;

(3) 在一个周期内只有有限个极大或极小值。

都可表示为无限多个幅度无穷小、频率连续变化的复正弦信号的叠加, 即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.29)$$

其中,

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.30)$$

式(5.30)将信号的时间函数变换为频率函数, 称为傅里叶正变换, 记为

$$F\{f(t)\} = F(j\omega) \quad \text{或} \quad f(t) \rightarrow F(j\omega)$$

式(5.29)将信号的频率函数变换为时间函数, 称为傅里叶反变换, 记为

$$F^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t) \quad \text{或} \quad F(j\omega) \rightarrow f(t)$$

$f(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) 和 $F(j\omega)$ ($-\infty < \omega < +\infty$) 称为傅里叶变换对, 记为

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad \text{或} \quad f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$f(t)$ 为信号的时域表示, $F(j\omega)$ 是信号的频域表示, 两者互为映像。

5.3.2 傅里叶变换的物理意义

实信号 $f(t)$ 的频谱密度函数

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (5.31)$$

一般为复数, 可以证明其幅度频谱 $|F(j\omega)|$ 为偶函数, 其相位频谱 $\varphi(\omega)$ 为奇函数。于是, 式(5.28)可表示为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \end{aligned} \quad (5.32)$$

因此, 傅里叶变换的物理意义是: 非周期连续信号 $f(t)$ 可表示为无限多个幅度 $|F(j\omega)| \frac{d\omega}{\pi}$ 无穷小的、频率 ω 连续变化的、相位为 $\varphi(\omega)$ 的余弦信号的叠加。

5.3.3 典型非周期信号的傅里叶变换

常用信号是组成复杂信号的基础, 掌握一些典型非周期信号的频谱, 再结合傅里叶变换的性质, 几乎可以分析工程上遇到的绝大多数信号的频谱。

1. 单边指数信号

单边指数信号的波形如图 5.18(a) 所示, 其表达式为

$$f(t) = e^{-at} \varepsilon(t) \quad a > 0 \quad (5.33)$$

根据傅里叶变换的定义, 有

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} \quad (5.34)$$

式 (5.34) 对应的幅度频谱为

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

其相位频谱为

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/a)$$

幅度频谱 $|F(j\omega)|$ 曲线和相位频谱 $\varphi(\omega)$ 曲线分别如图 5.18 (b)、(c) 所示。

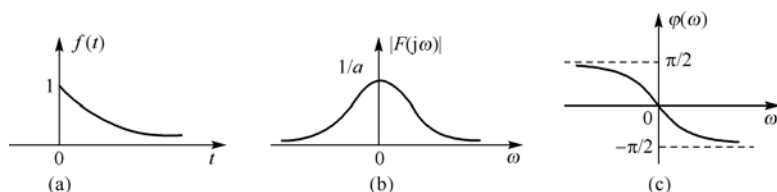


图 5.18 单边指数信号及其频谱

2. 单位阶跃信号

单位阶跃信号的波形如图 5.19 (a) 所示, 其数学表达式为

$$f(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

显然, 这种信号不满足绝对可积条件, 不能用式 (5.27) 直接求解 $F(j\omega)$ 。但它可以利用单边指数信号的极限来得到, 即

$$f(t) = \varepsilon(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} \varepsilon(t) \quad (5.35)$$

故

$$F(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} F(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{j\omega}{j(\alpha^2 + \omega^2)} \right] \quad (5.36)$$

当 $\omega \neq 0$ 时, 式 (5.36) 的第一项的极限为

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = 0$$

当 $\omega = 0$ 时, 式 (5.36) 的第一项的极限为不定式, 应按洛必达法则求解, 即

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{d(a)}{da}}{\frac{d(\alpha^2 + \omega^2)}{da}} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2a} \right) = \infty$$

说明上式在 $\omega = 0$ 处存在 $\delta(\omega)$, 其冲激强度为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} d\omega = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

因此

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega)$$

式(5.36)的第二项的极限为

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{j(\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{1}{j\omega}$$

则阶跃信号的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (5.37)$$

其幅度频谱曲线如图 5.19(b) 所示。

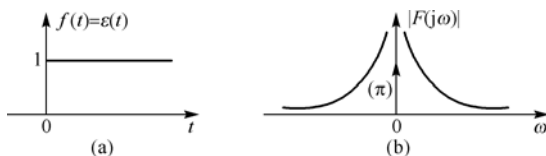


图 5.19 单位阶跃信号及其幅度频谱

3. 单位符号信号

单位符号信号的波形如图 5.20(a) 所示，其数学表达式为

$$f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

显然，这种信号不满足绝对可积条件，不能用式(5.30)直接求解 $F(j\omega)$ 。但它可以看做是两个单边指数信号在 $a \rightarrow 0$ 的极限的和，即

$$f(t) = \text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} \varepsilon(t) - e^{at} \varepsilon(-t)] \quad a > 0 \quad (5.39)$$

因此，符号信号的频谱函数

$$\begin{aligned} F\{f(t)\} &= \lim_{a \rightarrow 0} F\{e^{-at} \varepsilon(t) - e^{at} \varepsilon(-t)\} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] \\ &= \frac{2}{j\omega} \end{aligned} \quad (5.40)$$

式(5.40)对应的幅度频谱为

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{2}{\omega} \right|$$

其相位频谱为

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \pi/2 & \omega < 0 \\ -\pi/2 & \omega > 0 \end{cases}$$

幅度频谱 $|F(j\omega)|$ 曲线如图 5.20(b) 所示。

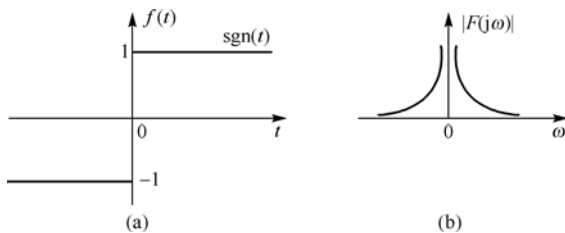


图 5.20 单位符号信号及其幅度频谱

4. 单位冲激信号

单位冲激信号的波形如图 5.21 (a) 所示, 其数学表达式为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (5.41)$$

根据傅里叶变换的定义和冲激信号的采样特性, 可求得其傅里叶变换为

$$F(j\omega) = 1 \quad (5.42)$$

可见, 单位冲激信号的频谱函数为常数 1, 它均匀分布于整个频率范围, 这种频谱常称为均匀谱或白色谱。也就是说, 时域变化异常激烈的单位冲激信号包含幅度相等的所有频率分量。冲激信号及其频谱的关系说明, 信号的持续时间与信号的频带宽度成反比关系, 当持续时间趋近于无穷小时, 频带宽度趋近于无穷大。单位冲激信号的幅度频谱曲线如图 5.21 (b) 所示。

5. 单位直流信号

如前所述, 冲激信号的频谱是常数, 那么时域为常数的信号(直流信号)的频谱是否为冲激函数呢?

单位直流信号的波形如图 5.22 (a) 所示, 其数学表达式为

$$f(t) = 1 \quad -\infty < t < \infty \quad (5.43)$$

显然该信号也不满足绝对可积条件, 这时可用反变换的定义式来求得其傅里叶变换。

我们来考虑 $\delta(\omega)$ 的傅里叶逆变换, 即

$$F^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad (5.44)$$

式 (5.44) 说明

$$F\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \delta(\omega)$$

即恒定信号 $\frac{1}{2\pi}$ 的频谱是 $\delta(\omega)$, 因而 $f(t) = 1$ 的频谱为

$$F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (5.45)$$

单位直流信号的幅度频谱曲线如图 5.22 (b) 所示。

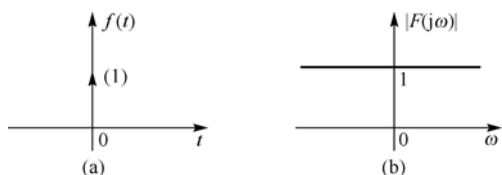


图 5.21 单位冲激信号及其幅度频谱

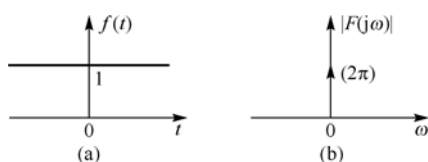


图 5.22 单位直流信号及其幅度频谱

6. 矩形窗信号

矩形窗信号也称为门信号, 其波形如图 5.23 (a) 所示, 表达式为

$$f(t) = G_{\tau}(t) = \begin{cases} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad (5.46)$$

其频谱函数为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = A\tau \text{Sa}(\omega\tau/2) \quad (5.47)$$

其频谱如图5.23 (b)所示。从图5.23 (b)可以看出,有限持续时间的矩形窗信号的频谱分布于无限宽的频率范围内,并按照采样函数规律变化,但其主要能量处于 $0 \sim (2\pi/\tau)$ 范围。矩形窗信号的频谱再次表明,信号的持续时间和频带宽度成反比。

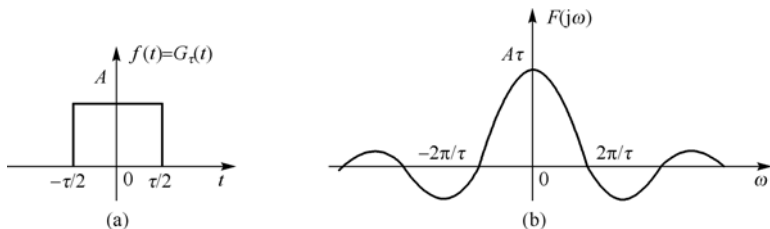


图 5.23 矩形窗信号及其幅度频谱

5.4 傅里叶变换性质

傅里叶变换建立了时域表示和频域表示之间的转换关系。在实际信号分析中,经常需要了解信号在时域的变化引起其频域的变化,或者从频域的变化推测时域施加了何种运算。傅里叶变换的性质揭示了信号在时域与频域变化的对应关系。利用这些变换性质可方便地求出傅里叶正、反变换,避免直接用傅里叶变换定义求解时遇到的积分运算困难。

5.4.1 线性

傅里叶变换的线性特性表述为:

若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \leftrightarrow k_1 F_1(j\omega) + k_2 F_2(j\omega) \quad (5.48)$$

式(5.48)中, k_1 和 k_2 均为常数。

证明:

$$\begin{aligned} F\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 f_1(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} k_2 f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= k_1 F_1(j\omega) + k_2 F_2(j\omega) \end{aligned}$$

利用傅里叶变换的线性特性,可以将待求信号分解为若干基本信号的和。

例 5.11 利用傅里叶变换的线性性质,求单位阶跃信号的频谱函数 $F(j\omega)$ 。

解 因为 $f(t) = \varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$, 根据傅里叶变换的线性性质,得

$$F(j\omega) = \frac{1}{2} \times 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} \times \frac{2}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

5.4.2 时移性

傅里叶变换的时移性也称为时延性,可表述为:

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

$$f(t \pm t_0) \leftrightarrow F(j\omega) e^{\pm j\omega t_0} \quad (5.49)$$

证明:

$$\begin{aligned} F\{f(t \pm t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t \pm t_0)] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)] e^{-j\omega(x \mp t_0)} dx \\ &= e^{\pm j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = F(j\omega) e^{\pm j\omega t_0} \end{aligned}$$

式(5.49)表明,若在时域将 $f(t)$ 平移时间 t_0 ,则其频谱函数的幅度并不改变,但其相位改变了 ωt_0 。

例 5.12 求 $f(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \tau \\ 0 & t < 0 \text{ 或 } t > \tau \end{cases}$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 。

解: $f(t)$ 是将矩形窗信号延时 $\tau/2$ 得到的。根据前面所讨论的门信号的频谱和傅里叶变换的时移特性,有

$$F(j\omega) = A\tau \text{Sa}(\omega\tau/2) e^{-j\omega\tau/2}$$

5.4.3 频移性

傅里叶变换的频移性也称为调制特性,可表述为:

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega - \omega_0)] \quad (5.50)$$

证明:

$$\begin{aligned} F\{f(t) e^{j\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= F[j(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

频移性说明,若信号 $f(t)$ 乘以 $e^{j\omega_0 t}$,相当于将信号的频谱 $F(j\omega)$ 沿频率轴右移 ω_0 。频谱搬移技术在通信系统中得到了广泛应用,通信技术中通常将信号 $f(t)$ 乘以正弦或余弦信号来实现频谱搬移。这里的 $f(t)$ 称为调制信号,正弦或余弦信号称为载波, $f(t)$ 与载波信号的乘积称为已调信号。根据频移性,可得已调信号的频谱函数为

$$\begin{aligned} F\{f(t) \cos(\omega_0 t)\} &= F\left\{\frac{1}{2}[f(t) e^{j\omega_0 t} + f(t) e^{-j\omega_0 t}]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{F[j(\omega + \omega_0)] + F[j(\omega - \omega_0)]\} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} F\{f(t) \sin(\omega_0 t)\} &= F\left\{\frac{j}{2}[f(t) e^{j\omega_0 t} - f(t) e^{-j\omega_0 t}]\right\} \\ &= \frac{j}{2}\{F[j(\omega + \omega_0)] - F[j(\omega - \omega_0)]\} \end{aligned} \quad (5.52)$$

例 5.13 已知矩形调幅信号 $f(t) = AG_\tau(t) \cos(\omega_0 t)$, 求该矩形调幅信号的频谱函数 $F(j\omega)$ 。

解: 因为矩形窗信号的频谱为

$$AG_\tau(t) \leftrightarrow A\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

根据式(5.51),有

$$F(j\omega) = \frac{1}{2}\{G[j(\omega + \omega_0)] + G[j(\omega - \omega_0)]\}$$

所以

$$F(j\omega) = \frac{A\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(\omega + \omega_0)\tau\right] + \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)\tau\right] \right\}$$

该矩形调幅信号及其频谱如图 5.24 所示。

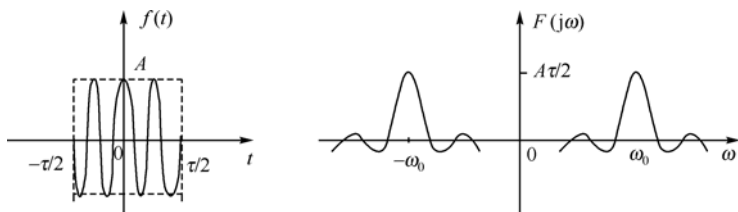


图 5.24 例 5.13 图

5.4.4 尺度变换

傅里叶变换的尺度变换性可表述为:

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad a \text{ 为非零实常数} \quad (5.53)$$

证明: 根据傅里叶变换的定义

$$F\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(at)] e^{-j\omega t} dt$$

在 $a > 0$ 时, 有

$$F\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a}x} dx = \frac{1}{a} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

在 $a < 0$ 时, 有

$$F\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a}x} dx = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

综合上述两种情况, 可得

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

特别地, 当 $a = -1$ 时, 得到

$$f(-t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

尺度变换性质说明, 函数 $f(at)$ 表示 $f(t)$ 沿时间轴压缩 a 倍, 而 $F(j\omega/a)$ 则表示频谱 $F(j\omega)$ 沿频率轴扩展 a 倍。它反映了信号的持续时间与其频带宽度成反比关系。

测不准原理表明, 信号的持续时间与其频带宽度的乘积为一个常数, 因此当信号的持续时间压缩 a 倍时, 则它的频带宽度就一定要扩展 a 倍。尺度定理就是测不准原理的具体体现。在通信系统中, 通信速度和频带宽度是一对矛盾, 希望信号的传输速度快, 即信号的持续时间短, 则相应地要求展宽传输介质的频带宽度。在有线通信中, 从电话用的双绞线到同轴电缆, 以至于现在广泛使用的光纤, 都是通过增加传输介质的频带宽度来提高通信速度。

例 5.14 已知 $f(t) = \begin{cases} A & |t| < \tau/4 \\ 0 & |t| > \tau/4 \end{cases}$, 求其频谱函数 $F(j\omega)$ 。

解: 我们已经知道矩形窗信号

$$f_0(t) = G_\tau(t) = \begin{cases} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

对应的频谱为

$$F_0(j\omega) = A\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

信号 $f(t)$ 比 $f_0(t)$ 的时间扩展了一倍, 即波形压缩了一倍, 则频谱相应地展宽了一倍。根据尺度变换性质, 有

$$F(j\omega) = \frac{1}{2}F_0\left(j\frac{\omega}{2}\right) = \frac{A\tau}{2}\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

矩形窗信号及频谱的展缩情况如图 5.25 所示。

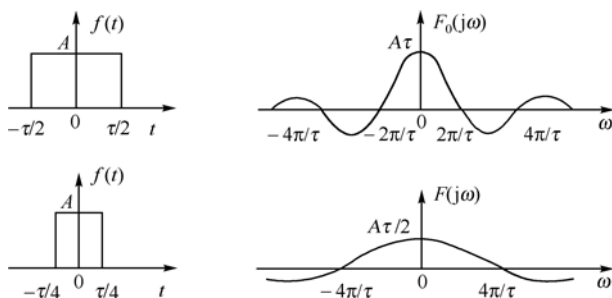


图 5.25 例 5.14 图

5.4.5 对称性

傅里叶变换的对称性也称为对偶性或互易性, 可表述为:

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (5.54)$$

证明: 根据傅里叶反变换的定义

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

则

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

将上式中的变量 t 换为 $-t$, 得

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

再将 t 与 ω 互换, 得

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$$

对照傅里叶变换的定义, 有

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

由对偶性可知, 把一个傅里叶变换对的 t 换成 $-\omega$, 同时把 ω 换成 t , 然后在 f 前乘以 2π 后, 就得到一个与原傅里叶变换对对偶的新的傅里叶变换对。

当 f 为偶函数时, 即 $f(-t) = f(t)$, 相应地有 $f(-\omega) = f(\omega)$, 则式 (5.54) 变为

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(\omega) \quad (5.55)$$

例 5.15 求采样信号 $\text{Sa}(\omega_c t)$ ($\omega_c > 0$) 的傅里叶变换。

解: 对于矩形窗信号 $G_\tau(t)$, 若

$$G_{\tau}(t) = \begin{cases} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

存在关系

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

用 $2\omega_c$ 替换 τ ，根据对偶性有

$$\text{Sa}(\omega_c t) = \frac{1}{2A\omega_c} [2A\omega_c \text{Sa}(\omega_c t)] \leftrightarrow \frac{2\pi}{2A\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

即

$$\frac{A\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow G_{2\omega_c}(\omega)$$

采样信号及其频谱曲线如图 5.26 所示。

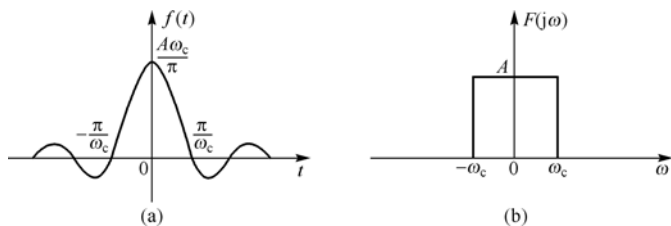


图 5.26 采样信号及其频谱

5.4.6 时域微分性、积分性

1. 时域微分性

傅里叶变换的微分性可表述为：若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega) \quad (5.56)$$

证明：根据傅里叶反变换定义

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边对 t 同时求导数，得

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(j\omega) \frac{d}{dt} (e^{j\omega t})] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

因此

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

同理，可推广到高阶导数的傅里叶变换，即

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad (5.57)$$

例 5.16 求单位冲激信号对应的 $\delta^{(n)}(t)$ 的傅里叶变换。

解：由于单位冲激信号的频谱函数为常数 1，即

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

根据式(5.57), 得

$$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$$

2. 时域积分性

傅里叶变换的时域积分性可表述为:

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (5.58)$$

证明: 由定义

$$\begin{aligned} F\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \varepsilon(t-\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

变换积分次序, 并利用阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 的傅里叶变换关系

$$F\{\varepsilon(t)\} = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

以及傅里叶变换的时移性

$$F\{\varepsilon(t-\tau)\} = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] e^{-j\omega\tau}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega) f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{j\omega} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \pi\delta(\omega) F(j\omega) + (j\omega)^{-1} F(j\omega) \\ &= \pi\delta(\omega) F(0) + (j\omega)^{-1} F(j\omega) \end{aligned}$$

例 5.17 试根据 $\delta(t) \leftrightarrow 1$ 和时域积分特性, 求阶跃信号的频谱函数。

解: 由于 $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 且阶跃信号

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

根据时域积分特性, 可得

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

5.4.7 频域微分性、积分性

1. 频域微分性

傅里叶变换的频域微分性可表述为:

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

$$tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(j\omega)}{d\omega} \quad (5.59)$$

对频谱函数的高阶导数有

$$t^n f(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} \quad (5.60)$$

证明：由傅里叶变换定义

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

两边同时求一阶导数，得

$$\frac{d}{d\omega} F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jtf(t)) e^{-j\omega t} dt$$

因此频域微分性质

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

改写为实用的形式，即

$$tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

例 5.18 求 $f(t) = t\varepsilon(t)$ 的频谱函数 $F(j\omega)$ 。

解：因为 $\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ ，根据频域微分特性，有

$$t\varepsilon(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

2. 频域积分性

傅里叶变换的频域积分性可表述为：

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ，则

$$\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(ju) du \quad (5.61)$$

频域积分性的证明方法与时域积分性类似，这里从略。

5.4.8 卷积定理

1. 时域卷积定理

时域卷积定理可表述为：若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

证明：

$$\begin{aligned} F\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_2(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_1(j\omega) F_2(j\omega) \end{aligned}$$

这个性质说明, 我们可将两个时间函数的卷积运算变为两个频谱函数的相乘(代数)运算。由此可以用频域法求解信号通过系统的响应, 使求解过程变得简单。

2. 频域卷积定理

频域卷积定理可表述为: 若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \quad (5.62)$$

频域卷积定理的证明方法与时域卷积定理类似, 这里从略。

例 5.19 根据时域卷积定理, 求单个三角脉冲的频谱。

解: 三角脉冲可看做是两个门函数 $G_\tau(t)$ 的卷积, 如图 5.27 所示。因为

$$G_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

又

$$f(t) = G_\tau(T) * \left(\frac{1}{\tau} G_\tau(t) \right)$$

所以

$$F(j\omega) = \tau \text{Sa}^2(\omega\tau/2)$$

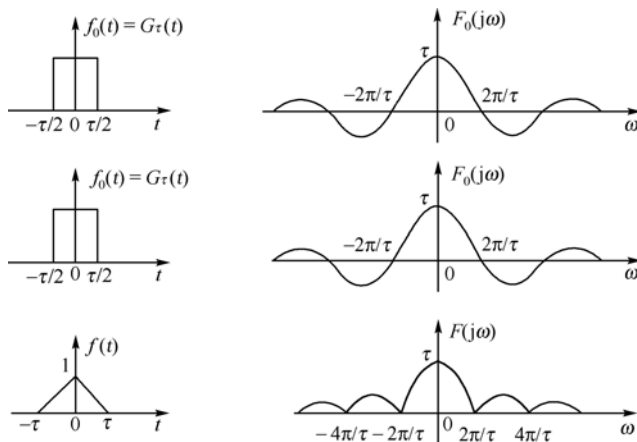


图 5.27 例 5.19 图

5.5 线性系统的频域分析

频域分析法也称为傅里叶变换分析法, 它是基于信号的频谱分析的概念, 讨论信号作用于线性系统时在频域中的响应的求解方法。

5.5.1 系统的频率特性 $H(j\omega)$

1. $H(j\omega)$ 的定义

对于任意一个线性时不变系统, 若激励为 $x(t)$, 响应为 $y(t)$, 则激励与响应的关系通常可以用常微分方程来描述, 即

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + L + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + L + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (5.63)$$

对式(5.63)两边取傅里叶变换, 并根据傅里叶变换的时域微分性, 得

$$[a_n(j\omega)^n + L + a_1(j\omega) + a_0]Y(j\omega) = [b_m(j\omega)^m + L + b_1(j\omega) + b_0]X(j\omega)$$

则系统响应的傅里叶变换为

$$Y(j\omega) = \frac{[b_m(j\omega)^m + L + b_1(j\omega) + b_0]}{[a_n(j\omega)^n + L + a_1(j\omega) + a_0]} X(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

定义

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (5.64)$$

为系统的系统函数,也称为该系统的频率响应特性,简称系统频率响应。如果将系统函数 $H(j\omega)$ 写成指数形式,则有

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

式中 $|H(j\omega)|$ 称为 $H(j\omega)$ 的模,称为系统的幅频特性; $\varphi(\omega)$ 为 $H(j\omega)$ 的辐角。

系统频率响应还可以用冲激信号的零状态响应频谱求解。

当系统的激励为冲激信号 $\delta(t)$ 时,系统的零状态响应即为冲激响应 $h(t)$, 即

$$x(t) = \delta(t), \quad y(t) = h(t)$$

冲激信号的频谱为

$$X(j\omega) = 1$$

因此系统的频谱函数为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = Y(j\omega) \quad (5.65)$$

式(5.65)表明,系统频率响应 $H(j\omega)$ 是系统冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换。

2. $H(j\omega)$ 的求法

系统频响函数 $H(j\omega)$ 的常用求解方法如下:

- (1) 当给定描述系统的微分方程时,可以由式(5.64)写出 $H(j\omega)$;
- (2) 当已知系统的单位冲激响应 $h(t)$ 时,对其进行傅里叶变换得到 $H(j\omega)$;
- (3) 当给定系统的电路模型时,可用正弦稳态电路相量模型求解 $H(j\omega)$ 。

例 5.20 已知描述系统的微分方程为 $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = f(t)$, 求频域系统函数 $H(j\omega)$ 。

解: 傅里叶变换的时域微分性,得

$$[(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3]Y(j\omega) = F(j\omega)$$

因此

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$

例 5.21 试求图 5.28(a) 中以 $i_2(t)$ 为响应时的频域系统函数 $H(j\omega)$ 。

解: (1) 用冲激响应的傅里叶变换求解。

首先考虑该电路在单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 激励下的零状态响应 $s(t)$, 根据三要素法,得

$$s(t) = e^{-\frac{t}{L/R}} \varepsilon(t)$$

则单位冲激信号激励下对应的冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

根据傅里叶变换的时域微分性, $h(t)$ 对应的频率响应函数为

$$H(j\omega) = (j\omega)S(j\omega)$$

其中 $S(j\omega)$ 可由傅里叶变换定义式求解, 即

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{L/R}} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega + \frac{R}{L}}$$

因此

$$H(j\omega) = (j\omega)S(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

(2) 用正弦稳态电路相量模型求解 $H(j\omega)$ 。

电路对应的相量模型如图 5.28(b) 所示。根据相量分析法, 可知

$$\dot{K}_2 = \left(\frac{j\omega L}{R + j\omega L} \right) \dot{K}$$

因此

$$H(j\omega) = \frac{\dot{K}_2}{\dot{K}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

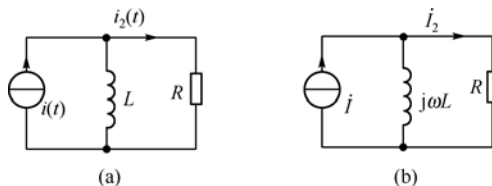


图 5.28 例 5.21 图

5.5.2 频域分析法

系统的频域分析法是从信号频谱分析的角度来讨论连续时间信号作用于系统时, 在频域中求解响应的方法, 其一般步骤如下:

- (1) 对激励信号进行傅里叶变换, 得到其频谱函数 $F(j\omega)$;
- (2) 利用上节介绍的方法, 求出系统频率特性 $H(j\omega)$;
- (3) 求系统响应的傅里叶变换 $Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$;
- (4) 如果要求输出时域解, 再将 $Y(j\omega)$ 从频域反变换到时域, 求出时域响应函数 $y(t)$ 。

例 5.22 单位阶跃电压作用于如图 5.29(a) 所示的 RC 电路, 求电容 C 上电压的响应 $u_C(t)$ 。

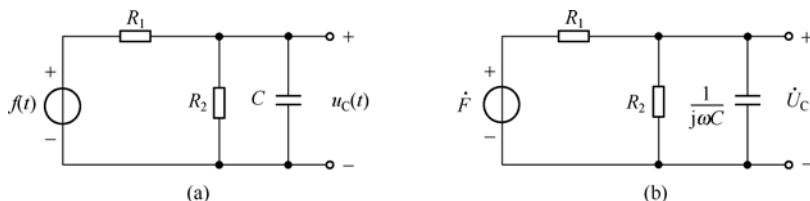


图 5.29 例 5.22 图

解: (1) 求激励信号的频谱。

由于激励时单位阶跃信号对应的频谱函数为

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

(2) 求系统频率特性 $H(j\omega)$ 。

电路对应的相量模型如图 5.29(b) 所示。根据相量分析法, 可知

$$\dot{U}_C = \frac{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}}{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}}} \dot{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} \dot{U}$$

因此

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

式中

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

称为电路的时间常数。

(3) 求输出响应的频谱。

系统的激励函数为单位阶跃信号, 对应的频谱函数为

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

则输出响应频谱函数为

$$U_C(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

(4) 由输出响应的频谱, 经傅里叶反变换求得时域响应 $u_C(t)$ 为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= F^{-1}[U_C(j\omega)] \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} F^{-1} \left[\pi\delta(\omega) \frac{1}{1 + j\omega\tau} + \frac{1}{j\omega(1 + j\omega\tau)} \right] \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} F^{-1} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{\tau}{1 + j\omega\tau} \right] \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left\{ F^{-1} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] - F^{-1} \left[\frac{1}{\frac{1}{\tau} + j\omega} \right] \right\} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \varepsilon(t) \end{aligned}$$

例 5.23 某线性时不变系统的冲激响应为 $h(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})\varepsilon(t)$, 求激励信号为 $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ 时系统的零状态响应。

解: 因为

$$F(j\omega) = F[f(t)] = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$H(j\omega) = F[h(t)] = \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 3} = \frac{1}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

则系统的零状态响应 $y(t)$ 的频谱函数为

$$Y_{zs}(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

将其进行部分分式展开, 得

$$Y_{zs}(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 1} + \frac{-1}{j\omega + 2} + \frac{1/2}{j\omega + 3}$$

对其进行傅里叶反变换, 可得

$$y_{zs}(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \right) \varepsilon(t)$$

由例 5.22 和例 5.23 可知, 利用傅里叶变换求解系统的零状态响应时, 必须首先求得激励的频谱函数和频域系统函数, 然后求出零状态响应的频谱函数, 最后求其傅里叶反变换。所以, 傅里叶分析法不如后面第 6 章介绍的拉普拉斯变换分析法方便, 实际上也很少用傅里叶分析法求解系统的零状态响应。但是, 频域分析法从频谱改变的观点来解释激励信号与响应波形的差异, 物理概念比较清楚, 反映系统本身是一个信号处理器, 它根据自身的频域系统函数 $H(j\omega)$ 对输入信号的频谱 $F(j\omega)$ 进行处理, 使得输出响应的频谱 $Y(j\omega)$ 满足实际要求。因此, 频域分析法的目的通常不是求解系统的时域响应, 重点是在频域分析信号的频谱和系统的带宽, 以及研究信号通过系统传输时系统对信号频谱的影响等。

5.5.3 电路无失真传输信号的条件

所谓无失真传输, 是指传输系统的响应与激励相比, 只是大小与出现的时间不同, 而在波形上无变化。大小不同意味着响应波形与激励波形只有幅度上的增加或衰减, 其波形上各点的瞬时值之比为常数 K ; 波形出现时间的不同是指响应波形相比激励波形在时间上有延迟, 如图 5.30 所示。

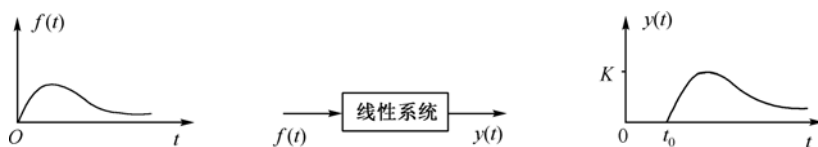


图 5.30 无失真传输示意图

如果激励信号为 $f(t)$, 通过传输系统后, 得到的响应输出为 $y(t)$, 则系统的无失真传输的时域条件表示为

$$y(t) = Kf(t - t_0) \quad (5.66)$$

式 (5.66) 中的 t_0 为响应波形滞后激励波形的时间。

对式 (5.66) 进行傅里叶变换, 并根据时移特性, 得到

$$Y(j\omega) = KF(j\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (5.67)$$

则无失真传输系统的频率特性为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = Ke^{-j\omega t_0} \quad (5.68)$$

即

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \varphi(\omega) = -\omega t_0 \end{cases} \quad (5.69)$$

式(5.69)表明, 线性系统要保证无失真传输应满足以下两个条件:

- (1) 系统函数的幅频特性在全频率范围内保持为与频率无关的常数;
- (2) 系统函数的相频特性是一条通过原点并具有斜率为 t_0 的直线。

无失真传输系统的频率特性如图 5.31 所示。

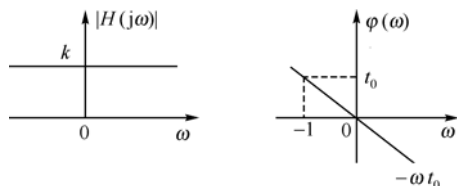


图 5.31 无失真传输系统的频率特性

显然, 如果系统的输入信号仅含一个频率分量(即单频信号), 那么无论这个系统具有什么样的频率特性, 其响应都不会有失真, 因为在这种单频信号的激励下, 系统响应仅仅是激励信号幅度大小的变化和波形位置的变化, 响应波形的形状和激励信号完全相同。

如果系统的输入信号由多个频率分量组成, 情况将有所不同。此时, 如果系统对不同频率分量的幅度加权系数不同, 或者是对不同频率分量附加的相移不同, 从而使得不同的频率分量在时间轴上移动的距离不同, 那么由于系统线性叠加的结果, 系统的响应将有失真, 其波形将不同于激励信号的波形。通常将前一种情况的失真称为幅度失真, 将后一种情况的失真称为相位失真。

为了实现无失真传输, 理论上要求系统具有无限大的带宽和线性相位特性, 实际上大多数情况下并不需要如此苛刻的条件。一般情况下, 实际信号的带宽都是有限的, 即使信号的频谱分布可以延展到无穷大频率处, 但由于各频率分量所含的能量随着频率的增高而减小, 由较高频率分量引起的失真可以忽略不计。因此为保证系统能够无失真地传输, 只需要系统具有有限的带宽就可以了。

例 5.24 某线性时不变系统的频率特性曲线如图 5.32 所示, 试问下列两信号 $y_1(t) = 2\cos(400t) + 3\cos(600t)$ 和 $y_2(t) = 6\cos(100t)\cos(300t)$, 通过此系统是否会发生线性失真?

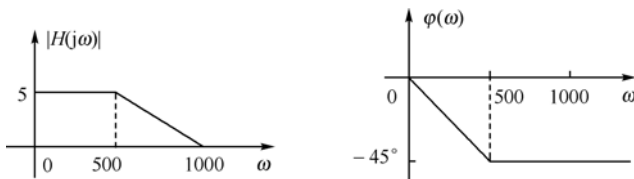


图 5.32 例 5.24 图

解: $y_1(t) = 2\cos(400t) + 3\cos(600t)$, 由于系统对频率为 400 Hz 和 600 Hz 两个频率点有不同的放大倍数, 并且在这两个频率点上的相位与频率不成反比, 所以信号 $y_1(t)$ 经过此系统会产生失真。
 $y_2(t) = 6\cos(100t)\cos(300t) = 3[\cos(200t) + \cos(400t)]$, 频率在 200~400 Hz 之间的不同频率放大都相同, 且相位是经过原点的一条直线, 所以信号 $y_2(t)$ 经过此系统不会产生失真。

5.6 滤波器

5.6.1 滤波器概述

在实际应用中，常常希望从一个输入信号中提取或增强所需要的频率分量，滤除或衰减某些不需要的频率分量，这个处理过程称为信号的滤波。通常把希望滤除或衰减的频率范围称为滤波器的阻带，而希望提取或保留的频率范围为滤波器的通带，通带和阻带之间的分界频率称为截止频率，用 ω_c 表示。

根据滤波器通带与阻带在频率轴上占据的相对位置，将滤波器分为低通滤波器 (Low Pass Filter, LPF)、高通滤波器 (High Pass Filter, HPF)、带通滤波器 (Band Pass Filter, BPF)、带阻滤波器 (Band Embarrass Filter, BEF)、全通滤波器 (All Pass Filter, APF) 等不同类型。理想滤波器的幅频特性如图5.33所示， ω_c 、 ω_{c1} 、 ω_{c2} 称为滤波器的截止频率， ω_{c1} 、 ω_{c2} 分别称为下限截止频率和上限截止频率。

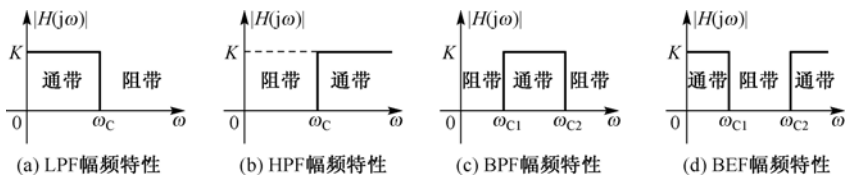


图 5.33 理想滤波器的幅频特性

根据滤波器所采用的元器件的不同，分为无源滤波器和有源滤波器两种。由无源元件(电阻、电感、电容等)组成的滤波器称为“无源滤波器”；由无源元件和有源器件(如晶体管放大器、集成运放等)组成的滤波器称为“有源滤波器”。无源滤波器的优点是：电路比较简单，不需要直流电源供电，可靠性高。但是这类滤波器通带内的信号有能量损耗，负载效应比较明显，使用电感元件时容易引起电磁感应，当电感 L 较大时滤波器的体积和质量都比较大，在低频领域不适用。有源滤波器的优点是：通带内的信号不仅没有能量损耗，而且还可以放大，负载效应不明显，多级相连时相互影响很小，利用级联的简单方法很容易构成高阶滤波器。有源滤波器的缺点是通带范围受有源器件(如集成运算放大器)的带宽限制，而且需要直流电源供电，可靠性也不如无源滤波器高，因此在高压、高频、大功率的场合不适用。

根据所处理的信号不同，分为模拟滤波器和数字滤波器两种。模拟滤波器处理的是连续的时间信号，而数字滤波器处理的是离散的时间信号。

滤波电路在通信、电子信息、仪器仪表等领域中有着广泛的应用。模拟滤波器在测试系统或专用仪器仪表中常用做变换装置，例如：带通滤波器用做频谱分析仪中的选频装置，低通滤波器用做数字信号分析系统中的抗频混滤波；高通滤波器用于声发射检测仪中剔除低频干扰噪声；带阻滤波器用做电涡流测振仪中的陷波器等。数字滤波器是数字信号处理系统的核心器件，由于它具有高精度、高可靠性、可编程改变特性或复用、便于集成等优点，使得它在数字通信、网络、语言信号处理、医学生物信号处理、视频和图像信号处理等应用领域占有重要的地位。

5.6.2 理想滤波器的频率特性

理想滤波器是指能使通带内信号的幅度和相位都不失真，阻带内的频率成分都衰减为零的滤波器。其时域关系可表示为

$$y(t) = \begin{cases} Kf(t-t_0) & \text{通带内} \\ 0 & \text{阻带内} \end{cases}$$

通带内
阻带内

对应的频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} \\ 0 \end{cases} \quad (5.70)$$

式(5.70)表明,理想滤波器在通带内的幅频特性应为常数 K ,相频特性的斜率为常值 $-t_0$;在通带外的幅频特性应为零。

按照通带与阻带在频率轴上占据的相对位置的不同,有四种常见的滤波器:

(1) 低通滤波器:系统满足使低于某一频率 ω_c 的信号分量无失真地通过,而阻止高于 ω_c 的信号分量通过的滤波器,称为低通滤波器。若低通截止频率为 ω_c ,则频率范围 $|\omega| \leq \omega_c$ 称为通带,而 $|\omega| > \omega_c$ 称为阻带。理想低通滤波器的频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (5.71)$$

(2) 高通滤波器:系统满足使高于某一频率 ω_c 的信号分量无失真地通过,而阻止低于 ω_c 的信号分量通过的滤波器,称为高通滤波器。若高通截止频率为 ω_c ,则频率范围 $|\omega| \geq \omega_c$ 称为通带,而 $|\omega| < \omega_c$ 称为阻带。理想低通滤波器的频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} & |\omega| \geq \omega_c \\ 0 & |\omega| < \omega_c \end{cases} \quad (5.72)$$

(3) 带通滤波器:系统满足使某一频带范围内的信号分量无失真地通过,而在该频率范围之外的信号分量不能通过的滤波器,称为带通滤波器。若带通滤波器的下限截止频率为 ω_{c1} ,上限截止频率为 ω_{c2} 则带通滤波器的通带频率范围为 $\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$,在此范围之外的频率为阻带频率范围。理想带通滤波器的频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} & \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0 & \text{其他频率} \end{cases} \quad (5.73)$$

(4) 带阻滤波器:系统满足使某一频带范围内的信号分量不能通过,而在该频率范围之外的信号分量无失真地通过的滤波器,称为带阻滤波器。若带阻滤波器的下限截止频率为 ω_{c1} ,上限截止频率为 ω_{c2} ,则带阻滤波器的阻带频率范围为 $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$,在此范围之外的频率为通带频率范围。理想带通滤波器的频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 0 & \omega_{c1} < \omega < \omega_{c2} \\ Ke^{-j\omega t_0} & \text{其他频率} \end{cases} \quad (5.74)$$

以上四种理想滤波器的频率特性如图 5.34 所示。

除上述四种常规的滤波器之外,还有一种特殊的滤波器——全通滤波器。全通滤波器具有平坦的频率响应,它不衰减任何频率的信号,只是改变输入信号的相位。利用这个特性,全通滤波器可以用做延时器、延迟均衡等。实际上,常规的滤波器(包括低通滤波器等)也能改变输入信号的相位,但幅频特性和相频特性很难兼顾,很难使两者同时满足要求。在应用中,通常把全通滤波器和其他滤波器组合起来使用,就能方便地解决这个问题。

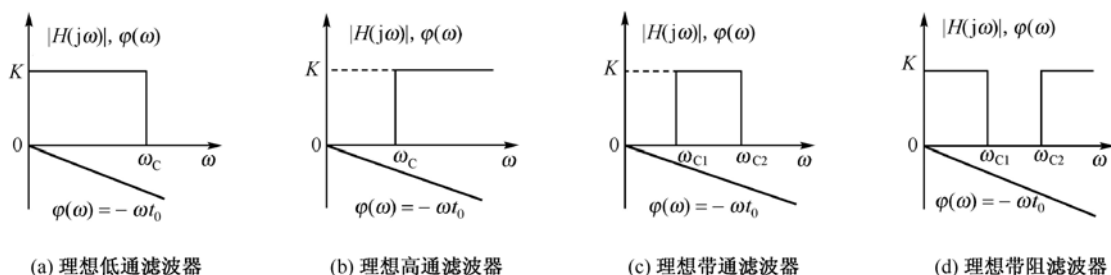


图 5.34 几种理想滤波器的频率特性

5.6.3 理想低通滤波器的单位冲激响应

当理想低通滤波器的激励信号为单位冲激信号 $\delta(t)$ 时, 对应的频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

运用傅里叶反变换, 得到理想低通滤波器的单位冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0} e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)} \right|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)} \end{aligned} \quad (5.75)$$

其波形如图 5.35 所示。

由图 5.35 可以看到, 理想低通滤波器的冲激响应延迟了 t_0 秒, 而且输出脉冲在其建立之前和建立之后都出现了振荡现象, 这种振荡一直延伸到 $\pm \infty$ 。特别是在 $t < 0$ 时, 激励信号 $\delta(t) = 0$, 但冲激响应 $h(t)$ 却不为零, 这在现实的物理系统中是不可能实现的。其实所有的理想滤波器在物理上都是无法实现的。实际滤波器的设计原则就是研究如何选择一个系统函数, 使其频率特性能够逼近理想滤波器的频率特性 $H(j\omega)$, 同时又是在物理上可以实现的。因此, 理想滤波器不会因其不可实现性而失去其研究价值。

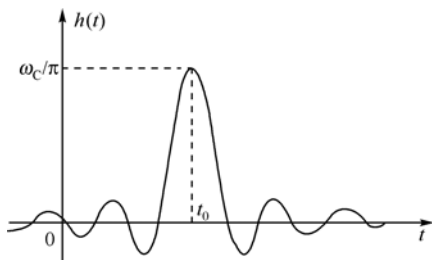


图 5.35 理想低通滤波器的单位冲激响应的波形

5.6.4 理想低通滤波器的单位阶跃响应

根据 $s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$, 可求得理想低通滤波器的单位阶跃响应为

$$s(t) = \frac{K}{2} + \frac{K}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-t_0)] \quad (5.76)$$

式中 K 为常数, $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy$, 单位阶跃信号和理想低通滤波器的单位阶跃响应的波形如图 5.36 所示。

由图 5.36 可见, 虽然单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 在 $t < 0$ 时为零, 但 $s(t)$ 在 $t < 0$ 时却出现了响应, 这同样反映了理想低通滤波器的非因果性; 与单位冲激响应一样, 单位阶跃响应 $s(t)$ 也产生 t_0 的延时; 虽

然 $\varepsilon(t)$ 在 $t = 0$ 时发生跳变, 但单位阶跃响应并不像单位阶跃信号那样陡直上升, 而是缓慢地上升并产生过冲和振荡现象。单位阶跃响应的缓升和过冲, 意味着滤波器滤除了单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 中的许多高频分量。

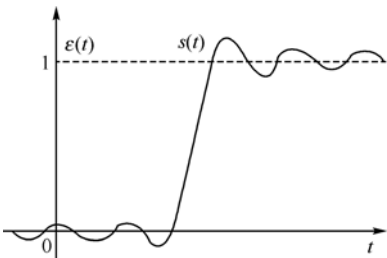


图 5.36 单位阶跃信号和理想低通滤波器的单位阶跃响应

为了衡量一个系统的快速反映性能, 定义系统的上升时间 t_r 为单位阶跃响应从最小值上升到最大值所需要的时间。可以推导出上升时间为

$$t_r = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{1}{f_c} \tag{5.77}$$

单位阶跃响应的上升时间与理想低通滤波器的带宽成反比, 滤波器的截止频率越高, 上升时间越短, 边沿变化越陡峭。

5.6.5 实际的低通滤波器

既然理想的低通滤波器是不能实现的, 而低通滤波器又是实际工程应用中最需要的。为了能够得到物理可实现的滤波器, 必须对滤波器的设计要求有所放松, 即允许在通带和阻带之间有缓冲形成过渡带; 并允许通带内各个频率的增益有一定的差异, 一般称其允许的误差最大值为通带内起伏; 允许在阻带内幅频特性不等于零, 只要幅频足够小, 就可以认为系统达到了阻止相应信号通过的目的, 阻带中各个频率分量上频率特性允许出现的最大幅度称为阻带衰减。实际的低通滤波器频率特性示意图如图 5.37 所示。

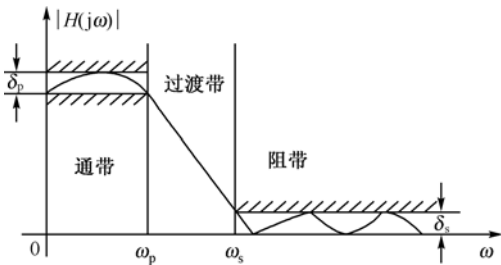


图 5.37 实际的低通滤波器频率特性示意图

通常将滤波器最大幅度的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处定义为滤波器的通带截止频率 ω_p , 由图 5.37 可以看到, 实际低通滤波器的通带为 0 到 ω_p 的频带范围, 通带带宽为 ω_p 。从通带到阻带存在一个渐变过程, 对应的频带称为过渡带, 过渡带的频带宽度取决于 ω_p 和 ω_s 的取值, 其中 ω_s 为进入阻带的开始频率, 其数值要根据实际问题来确定, 即根据阻带允许的最大幅度来确定。

低通滤波器在工程实际中有广泛的应用。噪声叠加在有用信号上常呈现“毛刺”状, 使用低通滤波器滤波可以消除这些“毛刺”, 图 5.38 给出了不同带宽的低通滤波器对加噪信号滤波的效果。当滤波

器的带宽较小时，虽然噪声被滤除得比较干净，但有用信号中的高频分量也被滤除掉了，即信号丢失了一些细节信息。

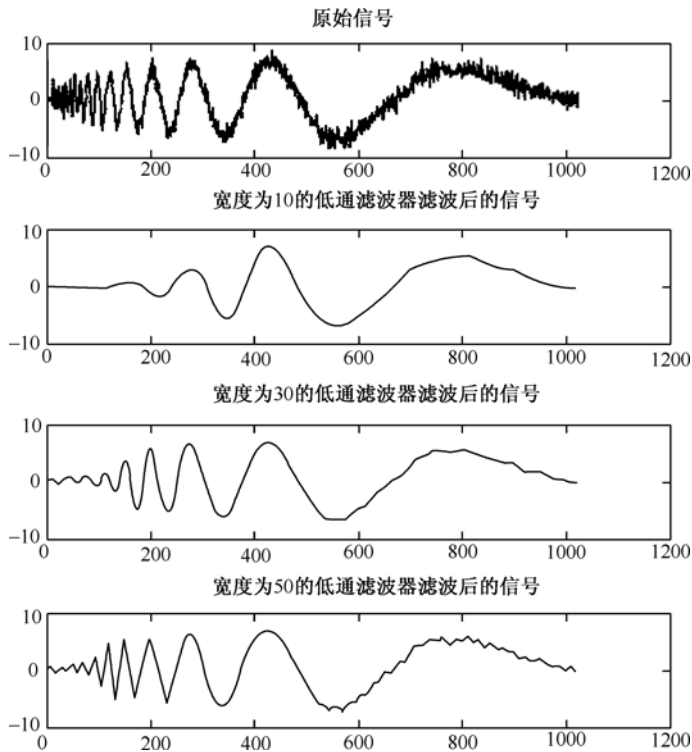


图 5.38 不同带宽的低通滤波器对加噪信号的滤波效果

5.7 Multisim 频域分析

运用 Multisim 提供的分析功能，可以方便地进行傅里叶分析及系统的频谱分析。

5.7.1 用 Multisim 对信号进行傅里叶分析

傅里叶分析(Fourier Analysis)是一种频域分析方法，它将周期性的非正弦信号转换成直流分量与一系列的正余弦信号的叠加。运用 Multisim 的傅里叶分析功能可以直观地看到周期信号的频谱曲线。进行傅里叶分析时，依次执行“Simulate”→“Analyses”→“Fourier Analysis”命令，将弹出如图 5.39 所示的对话框。

傅里叶分析对话框中包括四个选项卡，Output variables 选项卡用于设置输出变量；Miscellaneous Options 选项卡用于设置与仿真分析有关的各种参数，一般采用默认设置；Summary 选项卡列出了分析中所有的参数设置，用户可检查所要进行的分析设置是否正确；Analysis Parameters 选项卡用于分析参数的设置，包括 Sampling options 和 Results 两个选项区域。

1. Sampling options 选区

Sampling options 选区用于设置分析参数，包括以下内容：

- (1) Frequency resolution (Fundamental Frequency)：设定基频，如果电路中有多个交流信号源，则取各信号源频率之最小公倍数。单击“Estimate”按钮，程序自动设置。
- (2) Number of：用于设定需要分析的谐波次数。

- (3) Stopping time for sampling: 用于设定停止采样的时间。单击“Estimate”按钮, 程序自动设置。
- (4) Edit transient analysis: 设定瞬态分析选项。

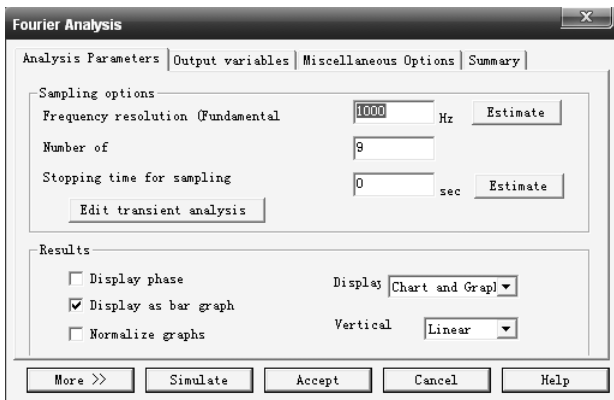


图 5.39 傅里叶分析对话框

2. Results 选区

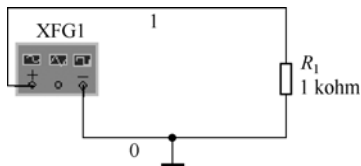
Results 选区用于设置结果显示方式, Multisim 2001 提供三种显示方式:

- (1) Display phase: 显示相位图。
- (2) Display as bar graph: 以线条方式汇出频谱图。
- (3) Normalize graphs: 以归一化频谱图方式显示。

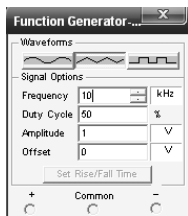
此外, 还可通过 Display 选项, 设定显示方式, 包括 Chart(数据表)、Graph(图形)及 Chart and Graph(同时显示数据表和图形)三个选项。Vertical scale 选项用于设定垂直刻度, 其中包括 Decibel(分贝刻度)、Octave(8 倍刻度)、Linear(线性刻度)及 Logarithmic(对数刻度)。

例 5.25 用 Multisim 对三角波信号进行傅里叶分析。

解: (1) 按图 5.40(a)所示建立仿真电路, 函数发生器设置如图 5.40(b)所示。



(a) 仿真电路图



(b) 三角波设置界面

图 5.40 例 5.25 图

(2) 执行“Simulate”→“Analyses”→“Fourier Analysis”命令, 按照图5.41所示设置傅里叶分析对话框。其中, 基频和停止采样的时间均按程序自动设置。

(3) 在 Output variables 选项卡中设置节点 1 的电压为傅里叶分析变量, 单击“Simulate”按钮, 即可得到如图 5.42 所示的三角波频谱曲线。

(4) 改变信号发生器的参数, 如频率、占空比等, 重复上述步骤, 观察信号周期与频谱密度、频谱幅度的变化。

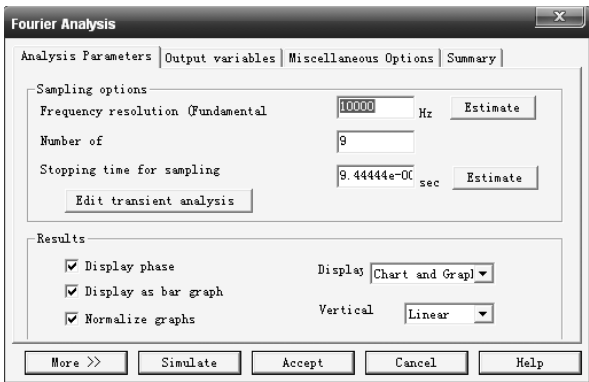


图 5.41 傅里叶分析参数设置

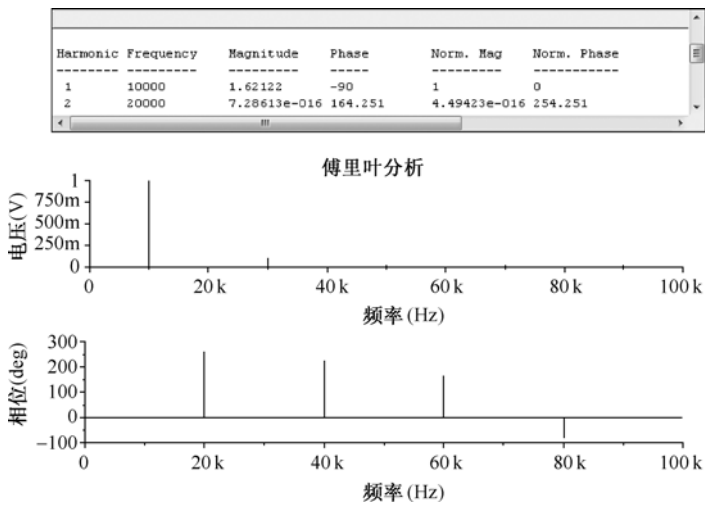


图 5.42 三角波的傅里叶分析曲线

通过实验，可以发现周期信号的幅度频谱具有以下特点：第一，频谱是由不连续的线条组成，每一条线代表一个正弦分量；第二，频谱的每条谱线都只出现在基波频率的整数倍的频率上，即频谱具有谐波性；第三，各条谱线的高度随着谐波次数的增高而逐渐减少，谱线具有收敛性。

上述实验结论与理论分析结论是完全吻合的。

5.7.2 用 Multisim 对网络的传输特性进行分析

运用 Multisim 提供的虚拟仪器(如双踪示波器、伯德仪)及 AC 分析功能，可观察和测量网络的传输特性。

伯德仪(也叫扫频仪)是测量网络的幅频特性和相频特性的常用仪器，其图标及参数设置面板如图 5.43(a)、(b)所示。

伯德仪有 IN 和 OUT 两对端口，分别接电路的输入端和输出端。参数设置面板中，Magnitude 为幅频特性测量按钮，Phase 为相频特性测量按钮；Y 轴设置区 Vertical 和 X 轴设置区 Horizontal 可设置其刻度类型及最初值和最终值，其中 Log 代表对数刻度，而 Lin 则代表线性刻度。如果需要具体测量某一频率下的幅度或相位，可以通过按箭头←或→移动游标，这时游标所在位置处的幅度和频率就显示在右面的显示框中。

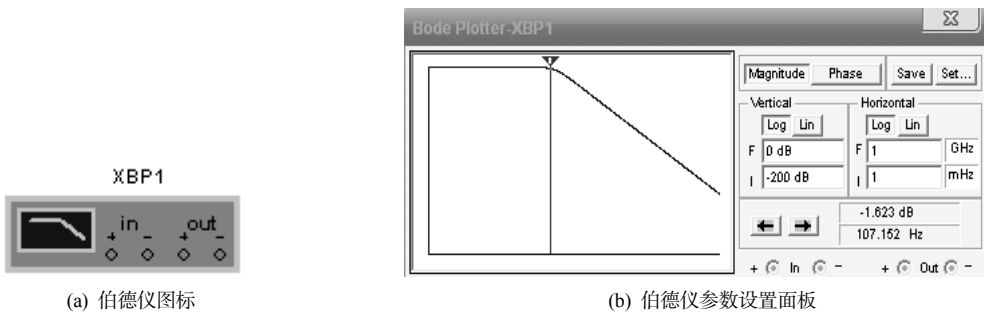


图 5.43 伯德仪及其参数设置

例 5.26 用 Multisim 对 RC 低通电路的传输特性进行分析。

解：(1) 按图 5.44 所示建立仿真电路。电路中输入的信号由三个频率不同的正弦信号叠加而成，按照定义，当输出信号下降为输入信号幅度的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，对应的频率为该低通电路的截止频率，用 f_c 表示。理论分析表明

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 159.24 \text{ Hz}$$

显然，50 Hz 和 150 Hz 的信号是低通滤波器频带宽度内的信号，而 300 Hz 的正弦分量因位于该低通滤波器频带宽度之外，必将受到抑制。当这三个信号叠加后的合成信号通过该低通滤波器后，输出信号波形将出现失真。

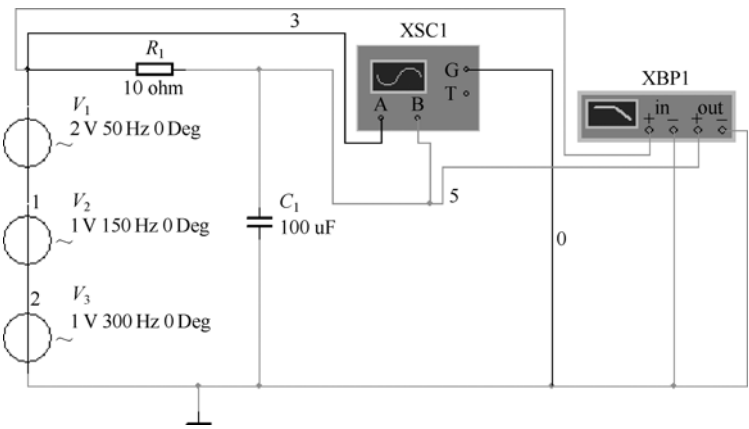


图 5.44 例 5.26 仿真电路

(2) 启动仿真按钮，双击示波器图标，示波器的参数设置及其仿真曲线如图 5.45 所示。可以看到输出信号与输入信号相比发生了明显失真。

(3) 仅使用示波器很难测定出电路的截止频率，也不能直观地看出电路对输入信号频率的选择特性，于是可以使用伯德仪或 Multisim 中的 AC 交流分析来精确地观察电路的频率特性。双击伯德仪，可以得到如图 5.46 所示的幅频特性曲线。显而易见，该电路实现低通滤波。

为了定量测量低通滤波电路的截止频率，将伯德仪参数设置为如图 5.46 所示，按箭头 ← 或 → 移动游标至最大幅度的 0.707 倍的位置附近 (该电路幅频特性的最大幅度测试结果为 1000)，可以看到该位置处的频率为 158.489 Hz，与理论计算的截止频率相符。

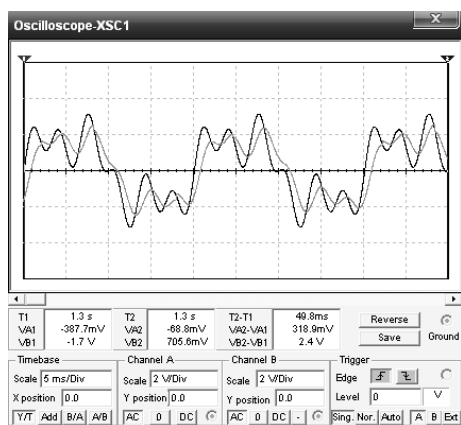


图 5.45 RC 低通电路的输入输出波形

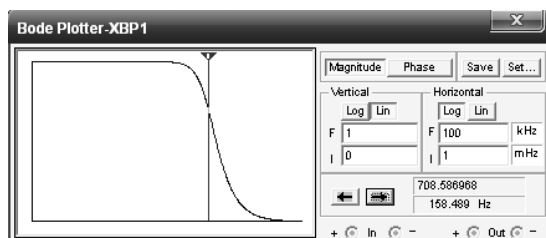


图 5.46 低通电路的幅频特性

小结

1. 周期信号的傅里叶级数展开

当任何周期函数满足狄利克雷条件时，即满足：

- (1) 在一个周期内绝对可积，即 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$ 成立；
- (2) 在一个周期内只有有限个间断点；
- (3) 在一个周期内只有有限个极大或极小值。

该周期函数可展开为一组正交函数的无穷级数之和。可以有三种展开形式，即：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

这三种表示形式不同，但本质上都是分析周期信号的不同形式的谐波成分。

2. 周期信号的频谱

周期信号的三角型傅里叶级数中，振幅 A_n 及相位 φ_n 随频率 $n\omega_1$ 变化的曲线称为单边频谱，其中振幅 A_n 随频率 $n\omega_1$ 变化的曲线叫幅度频谱，相位 φ_n 随频率 $n\omega_1$ 变化的曲线叫相位频谱。相应地，周期信号的指数型傅里叶级数中，幅度 $|F_n|$ 随频率 $n\omega_1$ 变化的曲线叫双边幅度频谱，相位 φ_n 随频率 $n\omega_1$ 变化的曲线叫双边相位频谱。

周期信号的频谱都具有离散性、谐波性和收敛性三个特点。

3. 非正弦周期信号的分析

当电路的激励为周期性非正弦信号时，采用傅里叶级数可以将其分解为直流分量与一系列频率不同的正弦分量的叠加，然后根据直流电路、正弦交流电路的分析法及叠加定理，可以对非正弦周期信号激励下稳态电路进行分析和计算。分析步骤是：

- (1) 把给定的非正弦输入信号分解成直流分量和各次谐波分量，并根据精度的具体要求取前几项；

(2) 分别计算各谐波分量单独作用于电路时的电压和电流;

(3) 应用线性电路的叠加原理, 将各次谐波作用下的电压或电流的瞬时值进行叠加。

非正弦周期电流和电压的有效值等于直流分量与各次谐波有效值平方和的平方根, 即

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots}$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots}$$

非正弦周期电流通过二端网络时, 二端网络的平均功率等于各次谐波对应的平均功率与直流分量的功率之和, 即

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots$$

4. 非周期信号的傅里叶变换

任何非周期连续信号, 当满足狄利克雷条件, 即满足

(1) 在一个周期内绝对可积, 即 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)| dt < \infty$ 成立;

(2) 在一个周期内只有有限个间断点;

(3) 在一个周期内只有有限个极大或极小值;

都可表示为无限多个幅度无穷小、频率连续变化的复正弦信号的叠加。

傅里叶正变换式为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶反变换式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$f(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) 和 $F(j\omega)$ ($-\infty < \omega < +\infty$) 称为傅里叶变换对, 记为

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad \text{或} \quad f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$$

5. 傅里叶变换的性质

利用傅里叶变换性质, 可以方便地由一些基本变换求取其他函数的傅里叶正、反变换, 从而避免直接由定义求解时所遇到的复杂积分运算。最常用的性质如下:

对称性

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

时移性

$$f(t \pm t_0) \leftrightarrow F(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}$$

频移性

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega - \omega_0)]$$

时域微分性

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

频域微分性

$$t^n f(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$$

时域积分性

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$$

6. 系统的频率特性及频域分析法

对于任意一个线性时不变系统,若激励信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(j\omega)$, 响应信号 $y(t)$ 的频谱为 $Y(j\omega)$, 则定义

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

为系统函数,也称为该系统的频率响应特性,简称系统频率响应。

求解系统频率响应 $H(j\omega)$ 的常用方法有:

- (1) 将描述系统激励与响应关系的微分方程进行傅里叶变换,再由定义式求解 $H(j\omega)$;
- (2) 首先确定系统的单位冲激响应 $h(t)$,再对其进行傅里叶变换得到 $H(j\omega)$;
- (3) 用正弦稳态电路相量模型求解 $H(j\omega)$ 。

系统的频域分析法是从信号频谱分析的角度来讨论连续时间信号作用于系统时,在频域中求解响应的方法,其一般步骤如下:

- (1) 对激励信号进行傅里叶变换,得到其频谱函数 $F(j\omega)$;
- (2) 求系统频率特性 $H(j\omega)$;
- (3) 求系统响应的傅里叶变换 $Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$;
- (4) 将 $Y(j\omega)$ 从频域反变换到时域,求出时域响应函数 $y(t)$ 。

7. 系统无失真传输

从时域角度看,系统无失真传输是指输出信号和输入信号相比,只有幅度大小和出现时间先后的差异,而波形形状不发生改变,即输入信号 $f(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 必须满足

$$y(t) = Kf(t - t_0)$$

从频域角度看,系统无失真传输应满足以下两个条件:

- (1) 系统函数的幅频特性在全频率范围内保持为与频率无关的常数;
- (2) 系统函数的相频特性是一条通过原点并具有斜率为 t_0 的直线。

即

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= K \\ \varphi(\omega) &= -\omega t_0 \end{aligned}$$

对于实际的系统,都有一定的工作频率范围,只要在工作频带内满足以上条件,系统就可无失真传输。

8. 滤波器

从一个输入信号中提取或增强所需要的频率分量,滤除或衰减某些不需要的频率分量,这个过程称为信号的滤波。

按照滤波器通带与阻带在频率轴上占据的相对位置,将滤波器分为低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器、带阻滤波器、全通滤波器等类型;按照滤波器所采用的元器件的不同,分为无源滤波器和有源滤波器两种;按照滤波器所处理的信号不同,分为模拟滤波器和数字滤波器两种。

能使通带内信号的幅度和相位都不失真,阻带内的频率成分都衰减为零的滤波器称为理想滤波器。其时域关系可表示为

$$y(t) = \begin{cases} Kf(t - t_0) & \text{通带内} \\ 0 & \text{阻带内} \end{cases}$$

对应的频率特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} & \text{通带内} \\ 0 & \text{阻带内} \end{cases}$$

通过分析理想低通滤波器的单位冲激响应及单位阶跃响应,可以看出理想低通滤波器是非因果系统,因而物理上无法实现,但是理想滤波器的概念在数字滤波器的设计中非常重要。

习题 5

5.1 判断下列函数是否为周期函数,如果是周期性的,试确定其周期。

$$(1) \quad x(t) = 2 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(2) \quad x(t) = \left[\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \right]^2$$

$$(3) \quad x(t) = [\cos 2\pi t] \varepsilon(t)$$

$$(4) \quad x(n) = A \cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$(5) \quad x(n) = e^{j\left(\frac{n}{8} - \pi\right)}$$

$$(6) \quad x(n) = \cos\left(\frac{n}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

5.2 将下列信号在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开为三角形式的傅里叶级数。

$$(1) \quad f(t) = t;$$

$$(2) \quad f(t) = |t|$$

5.3 求如图 5.47 所示的两种周期信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶级数展开式,并说明两者之间的关系。

5.4 已知周期信号 $f(t) = 3 \cos t + \sin\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(8t - \frac{\pi}{3}\right)$ 。

(1) 画出单边幅度频谱和相位频谱;

(2) 画出双边幅度频谱和相位频谱。

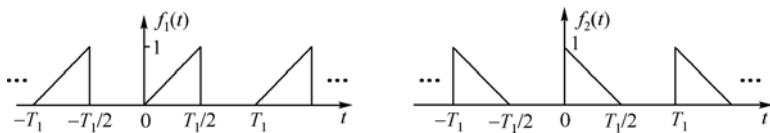


图 5.47

5.5 已知周期信号 $f(t) = 3 + \sqrt{3} \cos 2t + \sin 2t + \sin 3t - \frac{1}{2} \cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

(1) 画出单边幅度频谱和相位频谱;

(2) 画出双边幅度频谱和相位频谱。

5.6 已知周期信号 $f(t)$ 的双边频谱如图 5.48 所示。

(1) 写出信号 $f(t)$ 的指数型傅里叶级数;

(2) 根据 $f(t)$ 的双边频谱,画出 $f(t)$ 的单边频谱;

(3) 根据(2)画出的单边频谱,写出 $f(t)$ 的三角型傅里叶级数。

5.7 流过 5Ω 电阻上的电流为

$$i(t) = 5 + 14.14 \cos t + 7.07 \cos 2t \text{ A}$$

试计算电阻的平均功率。

5.8 二端网络两端电压为

$$u(t) = 100 + 100 \cos t + 50 \cos 2t + 30 \cos 3t \text{ V}$$

流入端的电流为

$$i(t) = 10\cos(t - 60^\circ) + 2\cos(3t - 135^\circ) \text{ A}$$

求二端网络吸收端功率。

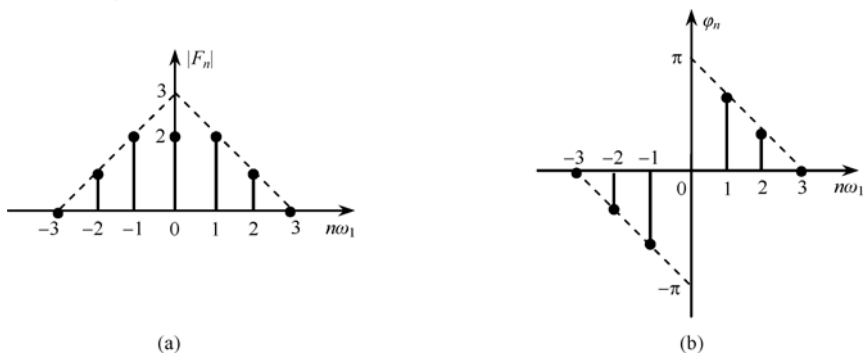


图 5.48

5.9 施加于 15Ω 电阻上端电压为 $u(t) = 100 + 22.4\cos(\omega t - 45^\circ) + 4.11\cos(3\omega t - 67^\circ) \text{ V}$

(1) 求端电压有效值；

(2) 求电阻消耗的平均功率。

5.10 图 5.49 所示电路，已知 $R = 6 \Omega$ ， $\omega L = 4 \Omega$ ， $\frac{1}{\omega C} = 12 \Omega$ ， $u = 15 + 80\cos(\omega t + 30^\circ) + 18\cos 3\omega t \text{ V}$ 。试求电路中的电流和所消耗的功率。

5.11 图 5.50 所示电路，已知 $R = 1.2 \text{ k}\Omega$ ， $C = 50 \mu\text{F}$ ，电流 $i(t) = 1.5 + \cos 3140t \text{ mA}$ 。求电压 $u(t)$ 。

5.12 RLC 串联电路的电压 $u(t)$ 与电流 $i(t)$ 采用关联参考方向，且

$$u(t) = 100\cos 314t + 50\cos(942t - 30^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 10\cos 314t + 1.755\cos(942t + \varphi_2) \text{ A}$$

求：(1) R 、 L 和 C 的值；(2) φ_2 的值；(3) 电路吸收的平均功率。

5.13 试求下列函数的傅里叶变换：

$$(1) f(t) = e^{-5t} \varepsilon(t)$$

$$(2) f(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} \varepsilon(t)$$

$$(3) f(t) = e^{-2|t|}$$

$$(4) f(t) = 6\varepsilon(t) - 7e^{-3t} \varepsilon(t)$$

$$(5) f(t) = 3e^{-j3t}$$

$$(6) f(t) = 2[\varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)]$$

$$(7) f(t) = e^{2t} \varepsilon(-t)$$

$$(8) f(t) = \begin{cases} |\sin \pi t| & |t| < 1 \\ 0 & \text{其他 } t \text{ 值} \end{cases}$$

5.14 信号 $f(t)$ 如图 5.51 所示，求 $F(j\omega)$ 并画出幅度频谱 $|F(j\omega)|$ 。

5.15 信号 $f(t)$ 如图 5.52 所示，求 $F(j\omega)$ 。

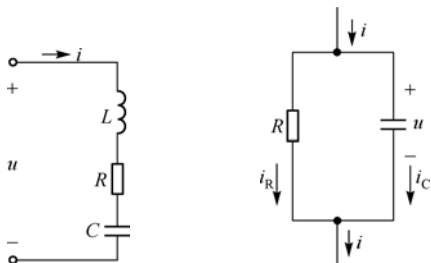


图 5.49

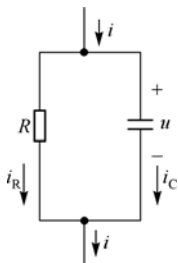


图 5.50

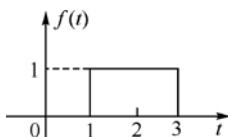


图 5.51

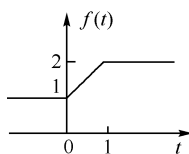


图 5.52

5.16 已知 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ，试求下列信号的傅里叶变换。

- | | |
|------------------------------------|---|
| (1) $(t-6)f(t-3)$ | (2) $(t-2)f(t)e^{j\omega_0(t-3)}$ |
| (3) $t \frac{df(t)}{dt}$ | (4) $\frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega_0 t}$ |
| (5) $\int_{-\infty}^{t+5} f(x) dx$ | (6) $(t-2)f(-t+2)$ |
| (7) $tf(2t)$ | (8) $(t-2)f(-2t)$ |
| (9) $(1-t)f(t-1)$ | (10) $f(t)\cos 2t$ |

5.17 利用傅里叶变换的特性求如图 5.53 所示信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换。

5.18 试求下列频谱函数所对应的时间信号 $f(t)$ 。

- | | |
|--|--|
| (1) $F(j\omega) = \frac{1}{(8+j\omega)^2}$ | (2) $F(j\omega) = 10\text{Sa}(5\omega)$ |
| (3) $F(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ | (4) $F(j\omega) = \varepsilon(\omega + \omega_c) - \varepsilon(\omega - \omega_c)$ |
| (5) $F(j\omega) = \frac{4+j\omega}{(2+j\omega)^2 + 5^2}$ | (6) $F(j\omega) = -\frac{2}{\omega^2}$ |

5.19 试用时域微分、积分特性求如图 5.54 (a)、(b) 所示信号的傅里叶变换。

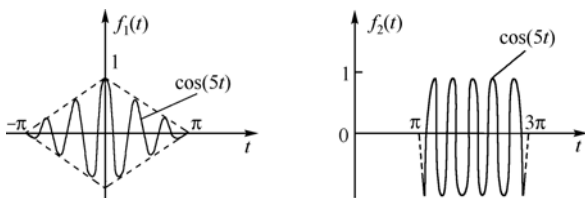


图 5.53

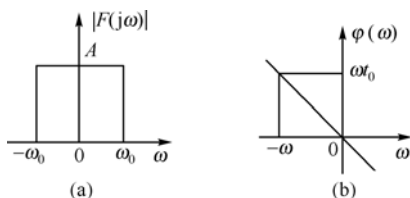


图 5.54

5.20 若系统函数为 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$ ，激励信号为 $f(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$ ，用频域分析法求零状态响应 $y(t)$ 。

5.21 试求图 5.55 所示各电路的网络函数 $H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$ 。

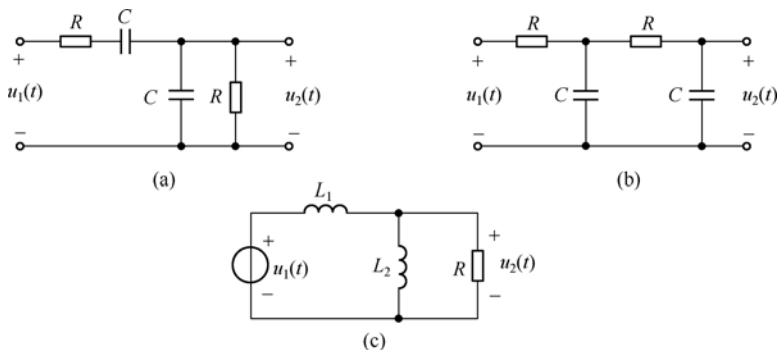


图 5.55

5.22 若系统函数为 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$ ，激励信号为 $f(t) = \sin t + \sin(3t)$ ，试求响应 $y(t)$ ，画出 $f(t)$ 和 $y(t)$ 的波形，讨论信号经过该系统传输后是否失真。

第6章 信号与系统的复频域分析

信号与系统的复频域分析法是指运用拉普拉斯变换将已知信号的时域函数变换为复频域函数,通过对复频域中对应的代数方程运算,得到响应的复频域解,最后经过拉普拉斯反变换求得响应的时域解的方法。复频域分析法是频域分析法的一种扩展,频域分析中傅里叶变换受到狄利克雷条件的限制,使得许多信号的傅里叶变换难于获得,甚至根本得不到傅里叶变换。例如阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 、斜坡信号 $t\varepsilon(t)$ 、单边正弦信号 $\sin t\varepsilon(t)$ 等,它们不满足绝对可积条件,因而无法直接从定义导出它们的傅里叶变换。虽然通过求极限的方法可以求得它们的傅里叶变换,但其变换式中常常含有冲激函数,使分析计算变得麻烦。再如单边指数信号 $e^{at}\varepsilon(t)(a>0)$,根本就不存在傅里叶变换。拉普拉斯变换则更具普遍意义,不仅扩大了变换范围,而且拉普拉斯反变换也比傅里叶反变换容易实现。因而,基于拉普拉斯变换的复频域分析法已经成为分析线性时不变系统的重要方法,应用十分广泛。

本章先从傅里叶变换入手引出双边拉氏变换,重点讨论单边拉氏变换的常用信号变换对、常用的拉氏变换性质及拉氏反变换,并以结合实例说明复频域分析法的具体应用,最后简要介绍网络函数 $H(s)$ 和网络特性。

6.1 拉普拉斯变换

6.1.1 拉普拉斯变换的定义

1. 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

当函数 $f(t)$ 满足狄利克雷条件时,便可构成一对傅里叶变换式

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (6.2)$$

在实际问题中遇到的许多信号,例如指数增长信号 $e^{at}(a>0)$,由于不满足绝对可积条件而不存在傅里叶变换。这些信号之所以不满足狄利克雷条件,是由于当 $t \rightarrow +\infty$ 或 $t \rightarrow -\infty$ 时, $f(t)$ 的极限不为0。如果给 $f(t)$ 乘上一个收敛因子 $e^{-\sigma t}$,选择合适的实数 σ ,就能做到当 $t \rightarrow +\infty$ 或 $t \rightarrow -\infty$ 时

$$f(t)e^{-\sigma t} \rightarrow 0$$

这样 $f(t)e^{-\sigma t}$ 就满足绝对可积条件,可以进行傅里叶变换,即

$$\begin{aligned} F\{f(t)e^{-\sigma t}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \end{aligned} \quad (6.3)$$

式(6.3)所示的变换可以看成是 $\sigma+j\omega$ 的函数,即

$$F(\sigma+j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \quad (6.4)$$

根据傅里叶反变换, 得

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.5)$$

将式(6.5)两边同时乘以 $e^{\sigma t}$, 并令 $s = \sigma + j\omega$, 则 $ds = jd\omega$, 式(6.5)积分的上下限也相应换为 $s = \sigma \pm j\omega$ 。于是式(6.4)和式(6.5)可改写为

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (6.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (6.7)$$

式(6.6)称为函数 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换, 它是复数 s 的函数, 称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的象函数, 记为 $F(s) = L[f(t)]$, 而式(6.7)称为 $F(s)$ 的双边拉普拉斯反变换, 它是时间 t 的函数, 称 $f(t)$ 为原函数, 记为 $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ 。 $f(t)$ 与 $F(s)$ 构成了一对拉普拉斯变换对, 通常简记为

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad (6.8)$$

例 6.1 求信号 $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ 的拉氏变换。

解: 由拉氏变换的定义, 得 $f(t)$ 的象函数 $F(s)$ 为

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\varepsilon(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} dt = -\frac{e^{-(s+1)t}}{s+1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+1} \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

2. 单边拉普拉斯变换

在实际问题中能记录和处理的一切信号都是有起始时刻的, 都是有始信号(也称为因果信号), 因而原函数可以表示为 $f(t)\varepsilon(t)$, 则式(6.4)变为

$$F(s) = L[f(t)\varepsilon(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (6.9)$$

式(6.9)称为 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换, 式中积分下限取 0 的目的是要把 $t=0$ 时出现的冲激函数及其各阶导数包含到积分中去。与此对应的单边拉普拉斯反变换为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad t > 0 \quad (6.10)$$

由于物理信号都是自接入时刻后才对系统起作用的, 而物理可实现系统又必须是因果系统。所以本章将主要讨论因果信号的单边拉普拉斯变换及其应用。

3. 拉普拉斯变换的收敛域

由于 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是 $f(t)$ 乘以收敛因子 $e^{-\sigma t}$ 后进行的傅里叶变换, 因而 $f(t)e^{-\sigma t}$ 比 $f(t)$ 更容易满足绝对可积的条件。因而, 拉普拉斯变换比傅里叶变换具有更广的信号变换范围, 通常称拉普拉斯变换为广义傅里叶变换。

由傅里叶变换的条件可知, 拉普拉斯变换的充分条件是 $e^{-\sigma t}f(t)$ 为绝对可积函数, 即

$$\int_0^{+\infty} |e^{-\sigma t}f(t)| dt < +\infty \quad (6.11)$$

这使得增长速度不快于指数增长函数的信号都存在拉普拉斯变换。

通常把满足 $e^{-\sigma t} f(t)$ 绝对可积条件的 σ 取值范围称为拉普拉斯变换的收敛域。在收敛域内, 信号的拉普拉斯变换存在; 在收敛域外, 信号的拉普拉斯变换不存在。

例 6.2 求信号 $f(t) = Ae^{-at}\varepsilon(t)$ ($a > 0$) 的拉氏变换的收敛域。

解: 根据拉氏变换的定义, 得

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} Ae^{-at}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} Ae^{-at}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

欲使 $F(s)$ 存在, 则应满足

$$\int_0^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma t}dt = \int_0^{\infty} Ae^{-at}e^{-\sigma t}dt = \int_0^{\infty} Ae^{-(\sigma+a)t}dt < \infty$$

即 $\sigma+a > 0$ 时, $F(s)$ 存在, 因此收敛域为 $\sigma > -a$, 如图 6.1 所示, $\sigma = -a$ 为收敛坐标。

从而, $f(t)$ 的拉氏变换为

$$F(s) = \frac{A}{s+a}, \quad \sigma > -a$$

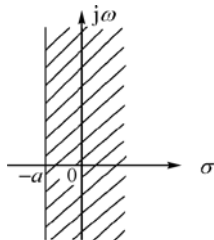


图 6.1 例 6.2 图

在实际应用中, 常见的因果信号的单边拉氏变换一定存在, 即总能找到一个足够大的 σ_0 值, 使信号 $f(t)$ 满足式 (6.11)。所以应用时, 将不再注明收敛域。

6.1.2 典型信号的拉普拉斯变换

下面通过求常用信号的单边拉氏变换, 掌握求单边拉氏变换的基本方法。

1. 单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$

根据单边拉普拉斯变换定义式, 有

$$L[\varepsilon(t)] = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

因此

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (6.12)$$

2. 单位冲激信号 $\delta(t)$

根据单边拉普拉斯变换定义式, 有

$$L[\delta(t)] = \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

因此

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (6.13)$$

3. 因果指数信号 $e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$

根据单边拉普拉斯变换定义式, 有

$$L[e^{-\alpha t}\varepsilon(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+s)t}dt = \frac{1}{s+\alpha} \quad (6.14)$$

因此

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$$

4. 单位斜坡信号 $t\varepsilon(t)$

根据单边拉普拉斯变换定义式, 有

$$L[t\varepsilon(t)] = \int_0^{\infty} te^{-st} dt$$

应用分部积分法, 得

$$L[t\varepsilon(t)] = -\frac{1}{s} \left[(te^{-st}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right] = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

因此

$$t\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad (6.15)$$

类似的方法, 可推得

$$t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (6.16)$$

5. 单边正弦信号 $\sin \omega_0 t \varepsilon(t)$

根据单边拉普拉斯变换定义式, 有

$$\begin{aligned} L[\sin \omega_0 t \varepsilon(t)] &= L\left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \varepsilon(t)\right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\int_0^{+\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-st} dt - \int_0^{+\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right] \\ &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

因此

$$\sin \omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad (6.17)$$

类似的方法, 还可得到单边余弦信号的拉普拉斯变换对为

$$\cos \omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (6.18)$$

6. 单边衰减正弦信号 $e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \varepsilon(t)$

根据单边拉普拉斯变换定义式, 有

$$\begin{aligned} L[e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \varepsilon(t)] &= L\left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) e^{-\alpha t} \varepsilon(t)\right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha - j\omega_0)t} e^{-st} dt - \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega_0)t} e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s + \alpha - j\omega_0} - \frac{1}{s + \alpha + j\omega_0} \right] \\ &= \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

因此

$$e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \quad (6.19)$$

类似的方法，还可得到单边衰减余弦信号的拉普拉斯变换对为

$$e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

(6.20)

为了便于查阅，表 6.1 列出了常用信号的单边拉氏变换。

表 6.1 常用信号的单边拉氏变换

序 号	原函数 $h(t) (t > 0)$	象函数 $F(s) = L[f(t)]$
1	$\delta(t)$	1
2	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n, n 为正整数	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\alpha t} (\alpha > 0)$	$\frac{1}{s \pm \alpha}$
6	$te^{\alpha t} (\alpha > 0)$	$\frac{1}{(s \pm \alpha)^2}$
7	$t^n e^{\alpha t} (\alpha > 0, n$ 为正整数)	$\frac{n!}{(s \pm \alpha)^{n+1}}$
8	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
9	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
10	$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
11	$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
12	$t \sin(\omega_0 t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
13	$t \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
14	$2Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \theta)$	$\frac{Ae^{j\theta}}{s + \alpha - j\omega_0} + \frac{Ae^{-j\theta}}{s + \alpha + j\omega_0}$

6.2 拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯变换是傅里叶变换的推广，与傅里叶变换类似，拉普拉斯变换也有许多性质，运用这些性质，可以简化拉普拉斯变换的计算，提高系统分析的效率。

6.2.1 线性

拉普拉斯变换的线性特性表述为：

若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$$

则

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \leftrightarrow k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$$

(6.21)

式(6.21)中， k_1 和 k_2 均为常数。

证明:

$$\begin{aligned} F\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] e^{st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 f_1(t) e^{st} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} k_2 f_2(t) e^{st} dt \\ &= k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s) \end{aligned}$$

例 6.3 求正弦信号 $\sin(\omega_0 t) \varepsilon(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 由欧拉公式, 得

$$\sin(\omega_0 t) \varepsilon(t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \varepsilon(t)$$

而

$$e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}$$

根据拉普拉斯变换的线性特性, 得

$$F[\sin(\omega_0 t) \varepsilon(t)] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

即

$$\sin(\omega_0 t) \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

6.2.2 时移性

拉普拉斯变换的时移性表述为:

若

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

则

$$f(t - t_0) \varepsilon(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad t_0 > 0 \quad (6.22)$$

证明:

由拉普拉斯变换的定义, 有

$$\int_{t_0}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0} \int_{t_0}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-s(t-t_0)} dt = e^{-st_0} F(s) \quad t_0 > 0$$

从证明过程可见, 条件 $t_0 > 0$ 是必须要满足的。若 $t_0 < 0$, 信号波形在零点以左部分不能包含在从 0_- 到 $+\infty$ 的积分中去, 从而造成错误。

例 6.4 求时域延迟冲激函数的拉普拉斯变换。

解: 对于冲激函数有

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

利用时移性, 可得

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}$$

例 6.5 若 $f(t) = t$, 分别求以下各信号的拉普拉斯变换(设 $t_0 > 0$): (1) $f(t) \varepsilon(t)$; (2) $f(t - t_0) \varepsilon(t)$; (3) $f(t) \varepsilon(t - t_0)$; (4) $f(t - t_0) \varepsilon(t - t_0)$ 。各信号的波形如图 6.2 所示。

解: (1) 由于 $f(t) \varepsilon(t) = t \varepsilon(t)$, 则

$$F(s) = L[t \varepsilon(t)] = \frac{1}{s^2}$$

(2) 由于 $f(t - t_0) \varepsilon(t) = (t - t_0) \varepsilon(t)$, 则

$$F(s) = L[(t-t_0)\varepsilon(t)] = L[t\varepsilon(t)] - L[t_0\varepsilon(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{t_0}{s} = \frac{1-st_0}{s^2}$$

(3) 由于 $f(t)\varepsilon(t-t_0) = t\varepsilon(t-t_0)$, 则根据定义并应用分部积分, 得

$$F(s) = \int_{t_0}^{\infty} te^{-st} dt = -\frac{t}{s}e^{-st} \Big|_{t_0}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{t_0 e^{-st_0}}{s} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_{t_0}^{\infty} = \frac{t_0 e^{-st_0}}{s} + \frac{e^{-st_0}}{s^2}$$

(4) 由于 $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) = (t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$, 则利用(1)的结果及时移特性, 得

$$F(s) = \frac{1}{s^2} e^{-st_0}$$

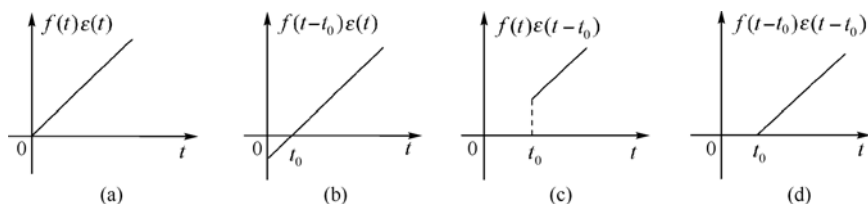


图 6.2 例 6.5 图

6.2.3 尺度变换性

拉普拉斯变换的尺度变换性表述为:

若

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \quad (6.23)$$

证明:

由拉普拉斯变换的定义, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$$

例 6.6 已知 $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 求 $f(2t-4)\varepsilon(2t-4)$ 的拉普拉斯变换。

解: 方法一: 先应用时移特性, 然后进行尺度变换, 可得

$$\begin{aligned} L[f(t-4)\varepsilon(t-4)] &= F(s)e^{-4s} \\ L[f(2t-4)\varepsilon(2t-4)] &= \frac{1}{2}F(s/2)e^{-4s/2} = \frac{1}{2}F(s/2)e^{-2s} \end{aligned}$$

方法二: 先进行尺度变换, 然后应用时移特性, 可得

$$\begin{aligned} L[f(2t)\varepsilon(2t)] &= \frac{1}{2}F(s/2) \\ L[f(2t-2)\varepsilon(2t-2)] &= L\{f[2(t-2)]\varepsilon[2(t-2)]\} = \frac{1}{2}F(s/2)e^{-2s} \end{aligned}$$

以上两种方法表明, 时移特性和尺度变换的运算顺序不同, 不会影响计算结果。

6.2.4 频移性

拉普拉斯变换的频移性表述为:

若

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

则

$$e^{s_0 t} f(t) \leftrightarrow F(s - s_0) \quad (6.24)$$

证明：由拉普拉斯变换的定义，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s_0 t} f(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(s-s_0)t} dt = F(s - s_0)$$

例 6.7 求 $e^{-t} \varepsilon(t-2)$ 的拉普拉斯变换。

解：由于

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

根据时移性，得

$$\varepsilon(t-2) \leftrightarrow \frac{1}{s} e^{-2s}$$

再由频移性，可得

$$L[e^{-t} \varepsilon(t-2)] = \frac{1}{s+1} e^{-2(s+1)}$$

例 6.8 已知 $f(t) = e^{-2t} \cos(3t) \varepsilon(t)$ ，求其拉普拉斯变换。

解：由于

$$\cos 3t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 9}$$

根据频移特性，则 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$L[f(t)] = F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

6.2.5 时域微分性

拉普拉斯变换的时域微分性表述为：

若

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

则

$$f'(t) \varepsilon(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-) \quad (6.25)$$

证明：由拉普拉斯变换的定义，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_{0_-}^{+\infty} + s \int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0_-)$$

同理，可推论：

$$f^{(n)}(t) \varepsilon(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - s^{n-2} f'(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-) \quad (6.26)$$

在零初始条件下，时域微分定理表明

$$f^{(n)}(t) \varepsilon(t) \leftrightarrow s^n F(s) \quad (6.27)$$

例 6.9 已知 $f_1(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$, $f_2(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ e^{-2t} & t > 0 \end{cases}$, 求它们的拉普拉斯变换及其导数 $f_1'(t)$ 和 $f_2'(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 比较 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的函数表达式发现, 虽然它们在 $t < 0$ 时的表达式不同, 但是在 $t > 0$ 时的表达式是完全一样的, 因此它们的单边拉普拉斯变换相同, 即

$$F_1(s) = F_2(s) = L[e^{-2t} \varepsilon(t)] = \frac{1}{s+2}$$

根据时域微分性, 且

$$f_1(0_-) = 0, \quad f_2(0_-) = -1$$

得

$$L[f_1'(t)] = sF_1(s) - f_1(0_-) = \frac{s}{s+2}$$

$$L[f_2'(t)] = sF_2(s) - f_2(0_-) = \frac{s}{s+2} - (-1) = \frac{2s+2}{s+2}$$

6.2.6 时域积分性

拉普拉斯变换的时域积分性表述为:

若

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

则

$$\int_{0_-}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} \quad (6.28)$$

$$\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0_-)}{s} \quad (6.29)$$

式中

$$f^{-1}(0_-) = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \Big|_{t=0_-}$$

证明: 由拉普拉斯变换的定义, 有

$$L\left[\int_{0_-}^t f(\lambda) d\lambda\right] = \int_0^{+\infty} \left[\int_{0_-}^t f(\lambda) d\lambda\right] e^{-st} dt$$

应用分部积分法, 求得

$$L\left[\int_{0_-}^t f(\lambda) d\lambda\right] = \left[\frac{-e^{-st}}{s} \int_{0_-}^t f(\lambda) d\lambda\right] \Big|_{0_-}^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

显然, 当 $t \rightarrow 0_-$ 和 $t \rightarrow \infty$, 上式的第一项积分为 0, 则

$$L\left[\int_{0_-}^t f(\lambda) d\lambda\right] = \frac{F(s)}{s}$$

若积分下限由 $-\infty$ 开始, 则有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda &= \int_{-\infty}^{0_-} f(\lambda) d\lambda + \int_{0_-}^t f(\lambda) d\lambda \\ &= f^{-1}(0_-) + \int_{0_-}^t f(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

因此

$$L\left[\int_{-\infty}^t f(\lambda)d\lambda\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0_-)}{s}$$

例 6.10 求 $t\varepsilon(t)$ 和 $t^2\varepsilon(t)$ 的拉氏变换。

解: 由于 $t\varepsilon(t) = \int_{0_-}^t \varepsilon(\tau)d\tau$, 且 $L[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}$, 利用时域积分性质, 有

$$L[t\varepsilon(t)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

而 $t^2\varepsilon(t) = 2\int_{0_-}^t \tau\varepsilon(\tau)d\tau$, 重复利用时域积分性质, 可得

$$L[t^2\varepsilon(t)] = 2 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

进一步递推, 可得

$$L[t^n\varepsilon(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

6.2.7 初值定理

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 且 $\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$ 存在, 则 $f(t)$ 的初值为

$$f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) \quad (6.30)$$

证明: 根据拉普拉斯变换的时域微分性

$$sF(s) - f(0_-) = \int_{0_-}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = \int_{0_-}^{0_+} f'(t)e^{-st}dt + \int_{0_+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

其中, 当 $t=0$ 时, $e^{-st}=1$, 因此

$$\int_{0_-}^{0_+} f'(t)e^{-st}dt = \int_{0_-}^{0_+} df(t) = f(0_+) - f(0_-)$$

故

$$sF(s) = f(0_+) + \int_{0_+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

令 $s \rightarrow +\infty$, 对上式两边取极限, 得

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) = f(0_+)$$

6.2.8 终值定理

若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ 存在, 则 $f(t)$ 的终值为

$$f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (6.31)$$

证明: 令 $f_+(t) = f(t)\varepsilon(t)$, 根据拉普拉斯变换的时域微分性

$$sF(s) - f(0_-) = \int_{0_-}^{+\infty} [f_+(t)]' e^{-st}dt$$

其中, 当 $s \rightarrow 0$ 时, $e^{-st}=1$, 对上式两边同时取极限, 得

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f_+(0_-)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_{0_-}^{+\infty} [f_+(t)]' dt \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [f_+(+\infty) - f_+(0_-)]$$

因此

$$f(+\infty)=\lim_{t\rightarrow+\infty}f(t)=\lim_{s\rightarrow 0}sF(s)$$

例 6.11 已知一个信号的拉氏变换为 $\frac{s+5}{(s+1)(s+3)}$ ，求该信号的初值和终值。

解：根据已知

$$F(s)=\frac{s+5}{(s+1)(s+3)}$$

而极限

$$\lim_{s\rightarrow+\infty}sF(s)=\lim_{s\rightarrow+\infty}\frac{s(s+5)}{(s+1)(s+3)}=1$$

存在，则

$$f(0_+)=\lim_{s\rightarrow+\infty}sF(s)=1$$

同理，该信号的终值

$$f(+\infty)=\lim_{s\rightarrow 0}sF(s)=\lim_{s\rightarrow 0}\frac{s(s+5)}{(s+1)(s+3)}=0$$

拉普拉斯变换还有一些其他性质，如时域卷积、复频域卷积等，它们与傅里叶变换的性质类似，这里就不重复了。表 6.2 列出了常用拉普拉斯变换的性质，以备查用。

表 6.2 拉普拉斯变换的主要性质

序 号	名 称	时域 $f(t) (t\geq 0)$	复频域 $F(s)$
1	线性特性	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$
2	尺度变换	$f(at) \quad a>0$ $f(at-b)\varepsilon(at-b) \quad a>0, \ b\geq 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ $\frac{1}{a}e^{-\frac{bs}{a}}F\left(\frac{s}{a}\right)$
3	时移特性	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \quad t_0>0$	$F(s)e^{-st_0}$
4	复频移特性	$f(t)e^{st_0}$	$F(s-s_0)$
5	时域微分	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ $\frac{df(t)}{dt}$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0_-)$ $sF(s)-f(0_-)$
6	时域积分	$\int_{0_-}^t f(t)dt$ $\int_{-\infty}^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$ $\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^0 f(\xi)d\xi$
7	复频域微分	$tf(t)$ $t^n f(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$ $(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
8	复频域积分	$\frac{f(t)}{t} \quad (\lim_{t\rightarrow 0}f(t)=0)$	$\int_s^\infty F(s)ds$
9	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)\cdot F_2(s)$
10	复频域卷积	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$
11	初值定理	若 $f(0_+)$ 存在，则 $f(0_+)=\lim_{t\rightarrow 0_+}f(t)=\lim_{s\rightarrow \infty}sF(s)$	
12	终值定理	若 $f(\infty)$ 存在，则 $f(\infty)=\lim_{t\rightarrow \infty}f(t)=\lim_{s\rightarrow 0}sF(s)$	

6.3 拉普拉斯反变换

从象函数 $F(s)$ 求原函数 $f(t)$ 的过程称为拉普拉斯反变换。求取拉普拉斯反变换的常用方法有三种：(1) 对于比较简单的变换式，可以利用表6.1及上节讨论的拉氏变换的性质得到原函数；(2) 围线积分法，即采用拉普拉斯反变换的定义式计算，它涉及一个复变函数的积分运算，一般来说比较复杂；(3) 采用部分分式展开法，它适用于象函数为有理函数的情形。部分分式展开法因避免了复变函数的积分运算，从而简化了求原函数的过程，而且这种方法对绝大多数信号的反变换问题都适合，因此本节将重点讨论部分分式展开法。

部分分式展开法的本质是利用拉氏变换的线性特性，将象函数 $F(s)$ 分解为若干简单函数之和，再分别求这些简单函数的反变换，从而得到所求的原函数。

设 $F(s)$ 为实系数有理分式，它可以表示为

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (6.32)$$

式中， m, n 为正整数。如果 $m < n$ ，则 $F(s)$ 为有理真分式，而当 $m \geq n$ 时，需要利用长除法将其转换成有理真分式。

例如，若象函数

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 6s + 6}{s^2 + 3s + 2}$$

显然 $m = n$ ， $F(s)$ 为假分式，可采用长除法运算变为真分式，即

$$\begin{array}{r} 1 \\ s^2 + 3s + 2 \overline{) s^2 + 6s + 6} \\ \underline{s^2 + 3s + 2} \\ 3s + 4 \end{array}$$

得

$$F(s) = 1 + \frac{3s + 4}{s^2 + 3s + 2}$$

运用部分分式展开法计算 $F(s)$ 的拉氏逆变换的步骤是：首先把它展开为部分分式之和，然后逐项计算逆变换，再根据拉普拉斯变换的线性特性将这些项的逆变换求和，就得到 $F(s)$ 的逆变换。

将式(6.32)的分母多项式进行因式分解，表示为

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \quad (6.33)$$

式(6.33)中， p_1, p_2, \dots, p_n 为 $D(s) = 0$ 的根，也称为 $F(s)$ 的极点。

同样，对式(6.32)的分子多项式也可进行因式分解，表示为

$$N(s) = (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n) \quad (6.34)$$

式(6.34)中， z_1, z_2, \dots, z_n 为 $N(s) = 0$ 的根，也称为 $F(s)$ 的零点。

$F(s)$ 的极点有实数单极点、共轭复数极点及多重极点三种情况，下面分别进行讨论。

6.3.1 实数单极点情况

当

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$$

中的 p_1, p_2, \dots, p_n 为互不相等的单实根(即实数单极点)时, 根据代数理论, 象函数 $F(s)$ 可分解为

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i} \quad (6.35)$$

式(6.35)中的 K_1, K_2, \dots, K_n 为待定系数, 可用如下方法求得

$$K_i = (s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (6.36)$$

求得待定系数后, 根据拉普拉斯变换的线性特性及表 6.1, 可得

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= L^{-1}\left[\frac{K_1}{s-p_1}\right] + L^{-1}\left[\frac{K_2}{s-p_2}\right] + \dots + L^{-1}\left[\frac{K_n}{s-p_n}\right] \\ &= [K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}] \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (6.37)$$

例 6.12 已知 $F(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+3)}$, 求 $f(t)$ 。

解: 由式(6.36)可知

$$\begin{aligned} K_1 &= [sF(s)]\big|_{s=0} = \frac{0+5}{(0+1)(0+3)} = \frac{5}{3} \\ K_2 &= [(s+1)F(s)]\big|_{s=-1} = \frac{-1+5}{(-1)(-1+3)} = -2 \\ K_3 &= [(s+3)F(s)]\big|_{s=-3} = \frac{-3+5}{(-3)(-3+1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

于是, 由式(6.37)可知

$$f(t) = \left[\frac{5}{3} - 2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \right] \varepsilon(t)$$

例 6.13 已知 $F(s) = \frac{s^3+3}{s^2+3s+2}$, 求 $f(t)$ 。

解: 由于象函数 $F(s)$ 为假分式, 因此需用长除法进行运算化为真分式, 即

$$\begin{array}{r} s-3 \\ s^2+3s+2 \overline{) s^3+0s^2+0s+3} \\ \underline{s^3+3s^2+2s} \\ -3s^2-2s+3 \\ \underline{-3s^2-9s-6} \\ 7s+9 \end{array}$$

得

$$F(s) = s-3 + F_1(s) = s-3 + \frac{7s+9}{s^2+3s+2}$$

其中

$$F_1(s) = \frac{7s+9}{s^2+3s+2}$$

为真分式, 将其展开成部分分式, 即

$$F_1(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

求得系数为 $K_1=2$, $K_2=5$, 则象函数为

$$F(s) = s-3 + \frac{2}{s+1} + \frac{5}{s+2}$$

由于

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow s$$

求得原函数为

$$f(t) = \delta'(t) - 3\delta(t) + 2e^{-t}\varepsilon(t) + 5e^{-2t}\varepsilon(t)$$

6.3.2 重极点情况

当

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)$$

中有一个 k 重根 p_1 时, 则 $D(s)$ 可写为

$$D(s) = (s - p_1)^k (s - p_{k+1})\cdots(s - p_n)$$

则 $F(s)$ 展开的部分分式为

$$F(s) = \frac{K_{1k}}{(s - p_1)^k} + \frac{K_{1(k-1)}}{(s - p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{K_{12}}{(s - p_1)^2} + \frac{K_{11}}{(s - p_1)} + \frac{K_{k+1}}{s - p_{k+1}} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \quad (6.38)$$

式(6.38)中, 系数 $K_{1k}, K_{1(k-1)}, \cdots, K_{11}$ 可按照下列步骤求解。

(1) 将式(6.38)两边同时乘以 $(s - p_1)^k$, 即

$$\begin{aligned} (s - p_1)^k F(s) &= K_{1k} + K_{1(k-1)}(s - p_1) + \cdots + K_{12}(s - p_1)^{k-2} + K_{11}(s - p_1)^{k-1} \\ &\quad + (s - p_1)^k \left[\frac{K_{k+1}}{s - p_{k+1}} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \right] \end{aligned} \quad (6.39)$$

令 $s = p_1$, 得

$$K_{1k} = (s - p_1)^k F(s) \Big|_{s=p_1}$$

(2) 将式(6.39)两边对 s 求一阶导数, 并令 $s = p_1$, 可得

$$K_{1(k-1)} = \frac{d}{ds} [(s - p_1)^k F(s)] \Big|_{s=p_1} \quad (6.40)$$

(3) 重复步骤(2), 可递推出重根项的部分分式系数的一般公式为

$$K_{im} = \frac{1}{(k - m)!} \left\{ \frac{d^{k-m}}{ds^{k-m}} [(s - p_1)^k F(s)] \right\} \Big|_{s=p_1} \quad m = 1, 2, \cdots, k \quad (6.41)$$

当全部系数都确定好后, 可根据式(6.16), 即

$$t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

并利用拉普拉斯变换的复频移性, 可得

$$\frac{K_{1m}}{(s - p_1)^m} \leftrightarrow \frac{K_{1m}}{(m-1)!} t^{(m-1)} e^{p_1 t} \varepsilon(t)$$

对应的原函数 $f(t)$ 为

$$f(t) = \left[\frac{K_{1k}}{(k-1)!} t^{(k-1)} + \frac{K_{1(k-1)}}{(k-2)!} t^{(k-2)} + \cdots + \frac{K_{12}}{1!} t + K_{11} \right] e^{p_1 t} \varepsilon(t) + \sum_{i=k+1}^n K_i e^{p_i t} \varepsilon(t) \quad (6.42)$$

例 6.14 求 $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}$ 的原函数。

解: $F(s)$ 有三阶重极点 p_1 和单极点 p_2 , 展开成部分分式为

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s+1)^3} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

根据式 (6.41) 求得系数 K_{11} 、 K_{12} 、 K_{13} 分别为

$$K_{11} = \frac{1}{(3-1)!} \left[\frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}} [(s+1)^3 F(s)] \right] \Big|_{s=-1} = 1$$

$$K_{12} = \frac{1}{(3-2)!} \left\{ \frac{d}{ds} [(s+1)^3 F(s)] \right\} \Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_{13} = \frac{1}{(3-3)!} \{ [(s+1)^3 F(s)] \} \Big|_{s=-1} = 2$$

由式 (6.36) 得

$$K_2 = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = -1$$

将各系数代入原式, 得象函数的部分分式

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

由式 (6.42), 可以求得原函数为

$$f(t) = (t^2 e^{-t} - t e^{-t} + e^{-t} - e^{-2t}) \varepsilon(t)$$

6.3.3 共轭复数极点情况

根据代数理论, 实系数二次方程, 若有复数根(或虚根), 必然是以共轭成对的形式出现的。

例 6.15 已知 $F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{s+2}{(s+1+j)(s+1-j)}$, 求 $f(t)$ 。

解: 由式 (6.36) 可知

$$K_1 = [(s+1+j)F(s)] \Big|_{s=-1-j} = \frac{-1-j+2}{-1-j+1-j} = \frac{1+j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$K_2 = [(s+1-j)F(s)] \Big|_{s=-1+j} = \frac{-1+j+2}{-1+j+1+j} = \frac{1+j}{2j} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

即 $K_2 = K_1^*$, 于是, 由式 (6.37) 可知

$$\begin{aligned} f(t) &= [K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}] \varepsilon(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[e^{j\frac{\pi}{4}} e^{(-1-j)t} + e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{(-1+j)t} \right] \varepsilon(t) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-t} \left[e^{j\left(\frac{\pi}{4}-t\right)} + e^{j\left(-\frac{\pi}{4}+t\right)} \right] \varepsilon(t) \\ &= \sqrt{2} e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon(t) \end{aligned}$$

由以上讨论可知, 具有复数极点的分式展开成部分分式后, 相应的系数也为共轭形式。因此只要求得一个系数后, 另一个系数就可以直接得到。

对于例 6.15, 还可以通过配项的方法求取反变换, 解答过程如下:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1} = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

查表 6.1 并利用频移特性, 得其反变换为

$$f(t) = e^{-t}[\cos(t) + \sin(t)]\varepsilon(t) = \sqrt{2}e^{-t} \cos(t - \frac{\pi}{4})\varepsilon(t)$$

显然, 采用配项法并结合拉普拉斯变换性质及查表结果, 可以简化求原函数的运算。

6.4 线性系统的复频域分析

拉普拉斯变换的诸多性质, 特别是线性性质、时域微分性质与时域卷积性质, 可使线性微分方程问题变为复频域的线性代数方程问题, 使线性动态系统的全响应问题变为 s 域模型下的代数问题与求拉氏正、反变换的问题。因而, 拉普拉斯变换是分析线性时不变系统的有效工具, 本节将以拉普拉斯变换为数学工具分析任意信号作用下的线性电路响应, 称为线性系统的拉氏变换分析或线性系统的复频域分析。

6.4.1 微分方程的复频域分析

用复频域分析法求解线性时不变电路对应的微分方程的基本步骤是:

- (1) 把时域微分方程变换为复频域的代数方程, 求得方程的解;
- (2) 经拉氏反变换得到方程的时域解。

例 6.16 描述系统的微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 5f(t)$, 求系统在输入为 $f(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$ 下的零状态响应。

解: 由于 $f(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$, 对应的象函数为

$$F(s) = \frac{1}{s+3}$$

取系统微分方程的拉氏变换, 并利用拉氏变换的时域微分性, 有

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{2s+5}{s+3}$$

这使得系统的零状态响应的拉氏变换为

$$Y_{zs}(s) = \frac{2s+5}{(s+3)(s^2+3s+2)} = \frac{3/2}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1/2}{s+5}$$

则系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \left[\frac{3}{2}e^{-t} - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-5t} \right] \varepsilon(t)$$

例 6.17 系统的微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2f'(t) + 8f(t)$, 激励和初始条件分别为 $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$ 和 $y'(0_-) = 2$, $y(0_-) = 3$, 求全响应 $y(t)$ 。

解: 由于 $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$, 对应的象函数为

$$F(s) = \frac{1}{s+1}$$

取系统微分方程的拉氏变换, 并利用拉氏变换的时域微分性, 有

$$[s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)] + 5[sY(s) - y(0_-)] + 6Y(s) = 2sF(s) + 8F(s)$$

解得

$$Y(s) = \frac{2s+8}{s^2+5s+6} F(s) + \frac{(s+5)y(0_-) + y'(0_-)}{s^2+5s+6}$$

上式第一项为零状态响应, 第二项为零输入响应, 即 $Y(s) = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s)$, 则零状态响应为

$$Y_{zs}(s) = \frac{2s+8}{s^2+5s+6} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{3}{s+1} + \frac{-4}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

对其进行拉氏反变换, 时域解为

$$y_{zs}(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t})\varepsilon(t)$$

零输入响应为

$$Y_{zi}(s) = \frac{3s+17}{s^2+5s+6} = \frac{11}{s+2} + \frac{-8}{s+3}$$

时域解为

$$y_{zi}(t) = 11e^{-2t} - 8e^{-3t} \quad t \geq 0$$

全响应为

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = 3e^{-t} + 7e^{-2t} - 7e^{-3t} \quad t \geq 0$$

这里, 用 $\varepsilon(t)$ 限定零状态响应的的时间范围, 隐含指 $t < 0$ 时该响应为零; 而用 $t \geq 0$ 限定零输入响应的和全响应的的时间范围, 是考虑到 $t < 0$ 时, 这些响应不为零。

例6.18 如图 6.3 所示的电路, 换路前电路处于稳态, 在 $t=0$ 时开关闭合, 求 $t \geq 0$ 的电流 $i(t)$ 。

解: 由图 6.3, 可以解得 $i(0_-) = 12/6 = 2 \text{ A}$ 。

$t \geq 0$ 时, 由 KVL 得 $u_L + u_R = 12$, 代入元件的伏安关系,

电路的微分方程为

$$\frac{2di(t)}{dt} + 4i(t) = 12$$

对微分方程进行拉氏变换, 并利用拉氏变换的时域微分性,

有

$$2[sI(s) - i(0_-)] + 4I(s) = \frac{12}{s}$$

代入初始值 $i(0_-) = 2 \text{ A}$

解得

$$I(s) = \frac{4s+12}{s(2s+4)} = \frac{2s+6}{s(s+2)} = \frac{3}{s} - \frac{1}{s+2}$$

所以

$$i(t) = (3 - e^{-2t}) \text{ A} \quad t \geq 0$$

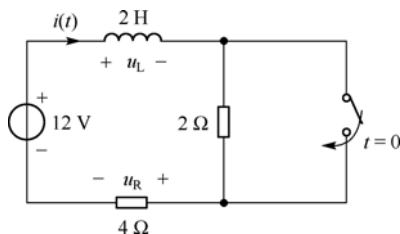


图 6.3 例 6.18 图

6.4.2 电路的复频域模型

当电路连接比较复杂且含有较多的动态电路时, 描述电路的高阶微分方程的列写就很困难, 因此在复频域内分析具体电路时, 需要建立复频域电路的等效模型, 以便能从该模型中直接列出求解复频域响应的代数方程, 进而通过对复频域响应的拉普拉斯反变换, 得到电路的时域响应。

1. 电路元件的 s 域模型

(1) 电阻元件的 s 域模型

关联参考方向下, 电阻元件的时域电压与电流的关系为

$$u(t) = R i(t)$$

对上式两边取拉氏变换, 得电阻元件的 s 域电压与电流的关系为

$$U(s) = R I(s) \quad (6.43)$$

可见,电阻元件的 s 域模型与时域模型具有相同的形式。

(2) 电容元件的 s 域模型

关联参考方向下,具有初始值 $u_C(0_-)$ 的电容元件的时域电压与电流的关系为

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

对上式两边取拉氏变换,并利用微分性质,得

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{1}{s} u_C(0_-) \quad (6.44)$$

或

$$I(s) = sCU(s) - Cu_C(0_-) \quad (6.45)$$

可见,一个具有初始电压 $u_C(0_-)$ 电容元件,其 s 域模型为复频域容抗 $\frac{1}{sC}$ 与电压源 $\frac{u_C(0_-)}{s}$ 相串联,或者为 $\frac{1}{sC}$ 与电流源 $Cu_C(0_-)$ 相并联。

(3) 电感元件的 s 域模型

关联参考方向下,具有初始值 $i_L(0_-)$ 的电感元件的时域电压与电流的关系为

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

对上式两边取拉氏变换,得

$$U(s) = sLI(s) - Li_L(0_-) \quad (6.46)$$

或

$$I(s) = \frac{1}{sL} U(s) + \frac{i_L(0_-)}{s} \quad (6.47)$$

同样,一个具有初始电流 $i_L(0_-)$ 的电感元件,其 s 域模型为复频域感抗 sL 与电压源 $Li_L(0_-)$ 相串联,或者为 sL 与电流源 $\frac{i_L(0_-)}{s}$ 相并联。

表 6.3 列出了三种元件(R, L, C)的 s 域模型。

2. s 域 KCL 定律和 KVL 定律

(1) KCL 的 s 域模型

在任意时刻,任意集总参数的电路中连有 N_i 条支路的节点 i 的 KCL 时域关系为

$$\sum_{k=1}^{N_i} i_{ik}(t) = 0$$

对上式两边取拉氏变换,得

$$\sum_{k=1}^{N_i} I_{ik}(s) = 0 \quad (6.48)$$

(2) KVL 的 s 域模型

在任意时刻,任意集总参数的电路中由 N_i 条支路形成的回路 i 的 KVL 时域关系为

$$\sum_{k=1}^{N_i} u_{ik}(t) = 0$$

对上式两边取拉氏变换,得

$$\sum_{k=1}^{N_i} U_{ik}(s) = 0 \quad (6.49)$$

式(6.48)和式(6.49)表明,电路 KCL 和 KVL 的 s 域模型与时域模型具有相同的形式。

表 6.3 R、L、C 元件的 s 域模型

		电阻	电感	电容
时域基本关系				
		$u_R(t) = Ri_R(t)$ $i_R(t) = \frac{1}{R}u_R(t)$	$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ $i_L(t) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)d\tau$	$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$ $u_C(t) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau$
s 域模型	串联形式			
		$U_R(s) = RI_R(s)$	$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$	$U_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{u_C(0_-)}{s}$
	并联形式			
		$I_R(s) = \frac{1}{R}U_R(s)$	$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{i_L(0_-)}{s}$	$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-)$

3. 电路的 s 域模型

在分析电路时，将原电路中已知的电压源和电流源的激励信号用其拉氏变换替代，待求的电压和电流用其拉氏变换式表示，各电路元件用如表6.3 所示的s域模型替换，就可以由时域电路模型得到对应的 s 域电路模型。在 s 域模型中，两类约束关系的 s 域关系式与电阻电路的时域关系式具有相同的形式，因此，所学过的线性电阻电路的分析方法 (如网孔法、节点法、叠加定理、戴维南定理等) 在 s 域模型中都适用，使得求解响应的过程大大简化。

例 6.19 电路如图 6.4(a) 所示， $C=1\text{ F}$ ， $R=1\text{ }\Omega$ ， $u_C(0_-)=1\text{ V}$ ， $u_s(t)=(1+e^{-3t})\varepsilon(t)$ ，求电容电压 $u_C(t)$ ， $t\geq 0$ 。

解：电路的 s 域模型如图 6.4(b) 所示，列写回路 KVL 方程为

$$\left(R+\frac{1}{sC}\right)I(s)+\frac{u_C(0_-)}{s}=U_s(s)$$

则

$$\begin{aligned}U_C(s) &= \frac{1}{sC}I(s)+\frac{u_C(0_-)}{s}=\frac{1}{sC}\frac{U_s(s)-\frac{u_C(0_-)}{s}}{R+\frac{1}{sC}}+\frac{u_C(0_-)}{s} \\&= \frac{U_s(s)-\frac{u_C(0_-)}{s}}{RCs+1}+\frac{u_C(0_-)}{s}=\frac{U_s(s)}{RCs+1}+\frac{u_C(0_-)}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{\frac{U_s(s)}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}+\frac{u_C(0_-)}{s+\frac{1}{RC}}\end{aligned}$$

式中，第一项为零状态响应，第二项为零输入响应。

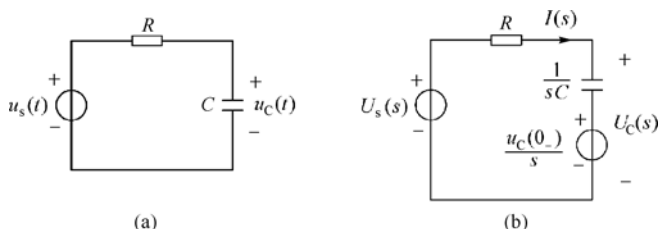


图 6.4 例 6.19 图

因为 $C=1\text{ F}$, $R=1\ \Omega$, 则

$$RC=1\text{ s}$$

$U_C(s)$ 表达式可简化为

$$U_C(s) = \frac{U_s(s)}{s+1} + \frac{u_C(0_-)}{s+1}$$

已知信号的拉氏变换为

$$U_s(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3}$$

将 $U_s(s)$ 及初始值 $u_C(0_-)$ 代入 $U_C(s)$ 的表达式, 得

$$U_C(s) = \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+3}}{s+1} + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2+5s+3}{s(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{0.5}{s+1} - \frac{0.5}{s+3}$$

取拉氏反变换, 得电容电压响应为

$$u_C(t) = (1 + 0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t})\varepsilon(t)\text{ V}$$

例 6.20 电路如图 6.5(a) 所示, $u_s(t) = 5\varepsilon(t)\text{ V}$, $u_C(0_-) = 5\text{ V}$, $i_L(0_-) = 4\text{ A}$, 求 $i_1(t)$ 。

解: 电路的 s 域模型如图 6.5(b) 所示, 列写网孔方程为

$$\begin{cases} (0.2 + \frac{1}{s}) I_1(s) - 0.2I_2(s) = \frac{5}{s} + U_s(s) \\ -0.2I_1(s) + (1.2 + 0.5s)I_2(s) = 2 \end{cases}$$

解得

$$I_1(s) = \frac{54s+120}{s^2+7s+12} = -\frac{42}{s+3} + \frac{96}{s+4}$$

取拉氏反变换, 得

$$i_1(t) = (-42e^{-3t} + 96e^{-4t})\varepsilon(t)\text{ A}$$

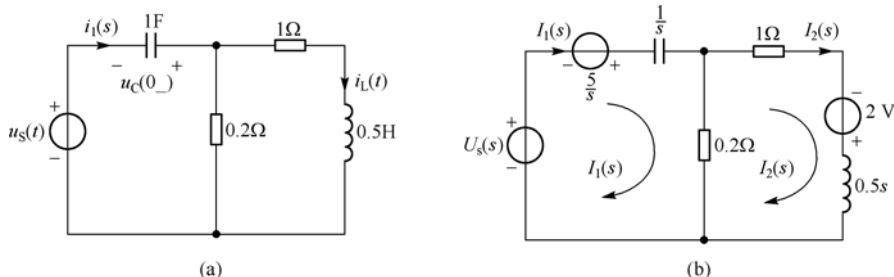


图 6.5 例 6.20 图

例 6.21 电路如图 6.6(a) 所示, $u_{s1}(t) = 2e^{-t}\varepsilon(t)$, $u_{s2}(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$, 求零状态响应 $i_L(t)$ 。

解: 电路的 s 域模型如图 6.6(b) 所示。本例用叠加定理求解。

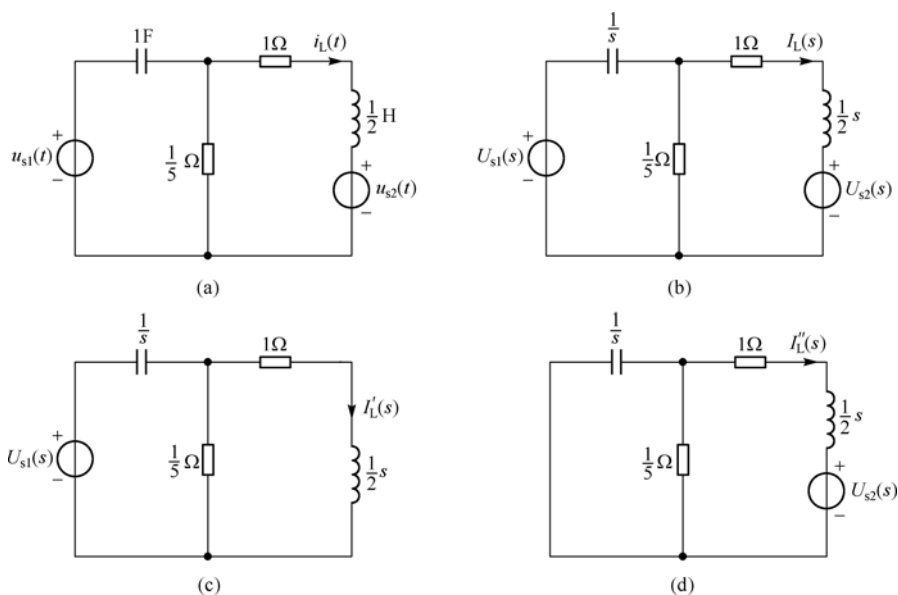


图 6.6 例 6.21 图

(1) 求 $u_{s1}(t)$ 单独作用的 $i'_L(t)$ 。

此时电路的等效 s 域模型如图 6.6(c) 所示, 则

$$\begin{aligned}
 I'_L(s) &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{2}s} \times \frac{\frac{2}{s+1}}{\frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{5}(1 + \frac{1}{2}s)}{\frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{2}s}} = \frac{4s}{(s+1)(s+3)(s+4)} \\
 &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{6}{s+3} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{s+4}
 \end{aligned}$$

取反变换, 得

$$i'_L(t) = \left(-\frac{2}{3}e^{-t} + 6e^{-3t} - \frac{16}{3}e^{-4t} \right) \varepsilon(t) \text{ A}$$

(2) 求 $u_{s2}(t)$ 单独作用的 $i''_L(t)$ 。

此时电路的等效 s 域模型如图 6.6(d) 所示, 有

$$\begin{aligned}
 I''_L(s) &= \frac{-\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{2}s + \frac{\frac{5s}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}s}}{\frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{2}s}} = \frac{-2(s+5)}{(s+2)(s+3)(s+5)} \\
 &= \frac{-3}{s+2} + \frac{4}{s+3} + \frac{-1}{s+4}
 \end{aligned}$$

取反变换, 得

$$i''_L(t) = (-3e^{-2t} + 4e^{-3t} - e^{-4t}) \varepsilon(t) \text{ A}$$

电路的零状态响应为

$$i_L(t) = i'_L(t) + i''_L(t) = \left(-\frac{2}{3}e^{-t} - 3e^{-2t} + 10e^{-3t} - \frac{19}{3}e^{-4t} \right) \varepsilon(t) \text{ A}$$

6.5 网络函数与网络特性

网络函数又叫系统函数或传输函数,它是在 s 域描述系统的重要工具。利用网络函数的零点、极点分布,可以定性地分析网络的时域特性、频域特性和稳定性等。

6.5.1 网络函数

对于任意一个线性时不变系统,若激励为 $x(t)$, 响应为 $y(t)$, 则激励与响应的关系通常可以用常微分方程来描述,即

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + L + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + L + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (6.50)$$

设系统处于零状态, $x(t)$ 在 $t \geq 0$ 时接入系统, 则对式 (6.50) 两边取拉氏变换, 得

$$[a_n s^n + L + a_1 s + a_0]Y(s) = [b_m s^m + L + b_1 s + b_0]X(s) \quad (6.51)$$

式中, $Y(s)$ 为零状态响应的象函数; $X(s)$ 为激励信号的象函数。

定义零状态条件下系统响应的象函数与激励信号的象函数之比为系统的网络函数, 用 $H(s)$ 表示, 即

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (6.52)$$

由式 (6.52) 可知, 网络函数只与系统的结构、元件参数等有关, 与激励及初始值无关, 即网络函数仅反映系统本身的特性, 它在网络分析与综合中占有重要地位。

根据网络函数的定义, 若激励信号的象函数 $X(s)$ 已知, 则系统零状态响应的象函数为

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad (6.53)$$

当系统的激励信号为 $\delta(t)$ 时, 由式 (6.53) 和 $L[\delta(t)] = 1$, 得到系统的单位冲激响应为

$$h(t) = L^{-1}[H(s)]$$

上式表明, 系统的单位冲激响应 $h(t)$ 与系统函数 $H(s)$ 是一对拉氏变换对, 记为

$$h(t) \leftrightarrow H(s) \quad (6.54)$$

这样, 对式 (6.54) 取拉氏反变换, 并由时域卷积性质, 得到系统零状态响应为

$$y(t) = L^{-1}[X(s)H(s)] = x(t) * h(t) \quad (6.55)$$

例 6.22 系统的微分方程为 $y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = 2f'(t) + 3f(t)$, 求该系统的网络函数 $H(s)$ 。

解: 设系统为零状态, 对系统的微分方程两边取拉氏变换, 得

$$s^2 Y(s) + 7sY(s) + 12Y(s) = 2sX(s) + 8X(s)$$

由式 (6.52) 可得系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 7s + 12}$$

例 6.23 已知电路如图 6.7(a) 所示, 求该电路系统的网络函数 $H(s)$ 。

解: 画出零状态条件下电路的 s 域模型如图 6.7(b) 所示, 则有

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} + sC}$$

$$U_C(s) = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} + sC}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} + sC}} U_s(s) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{sL} + R_1 sC} U_s(s)$$

故系统的网络函数为

$$H(s) = \frac{U_C(s)}{U_s(s)} = \frac{\frac{1}{R_1 C} s}{s^2 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{R_1 C} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} s + \frac{1}{LC}}$$

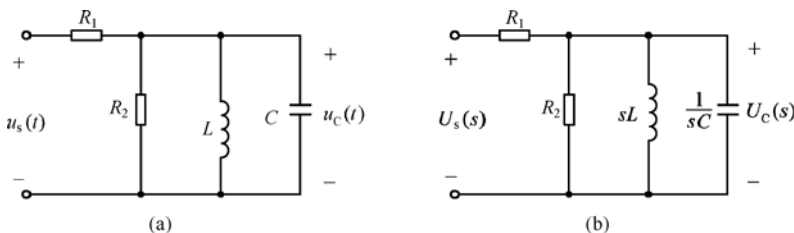


图 6.7 例 6.23 图

综上所述, 系统的网络函数可以在零状态条件下将电路的微分方程经拉氏变换得到, 还可以通过对系统的单位冲激响应求拉氏变换得到, 当系统为一个具体电路时, 也可以由s域模型求得。

6.5.2 网络函数的零点、极点

根据式(6.51)和式(6.52), 线性系统的网络函数为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

上式为复变量 s 的有理分式, 对其进行因式分解, 得

$$H(s) = H_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (6.56)$$

式中, $H(s)$ 的分母多项式 $D(s)$ 称为网络的特征多项式, 特征方程 $D(s) = 0$ 的根 $p_j (j=1, \dots, n)$ 称为网络函数 $H(s)$ 的极点, 当复变量 s 为极点时, 系统函数 $H(s)$ 为无穷大; 而 $H(s)$ 分子多项式 $N(s) = 0$ 的根 $z_i (i=1, 2, \dots, m)$ 称为 $H(s)$ 的零点, 当复变量 s 为零点时, 系统函数 $H(s)$ 为零。

例 6.24 已知某系统的网络函数为 $H(s) = \frac{s[(s-1)^2 + 1]}{(s+1)^2(s^2 + 4)}$, 求该系统的零点、极点。

解: 其零点为 $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - j$, $z_3 = 1 + j$, 而极点为 $p_1 = -1$, $p_2 = -j2$, $p_3 = +j2$ 。

为了更直观地表示系统的零点、极点情况,通常将 $H(s)$ 的零点和极点表示在 s 复平面上,它是以 s 的实部 σ 为横轴,虚部 $j\omega$ 为纵轴的坐标平面,图中用“o”表示零点,用“x”表示极点,若为重零点、重极点,则在其旁加以标注即可。这样的图称为网络函数 $H(s)$ 的零点、极点图,如例6.24系统的零点、极点图如图6.8所示。

借助网络函数 $H(s)$ 对应的零点、极点分布图,可以直观地展现网络响应的许多规律,如表明网络响应的时域特性、频域特性和网络的稳定性等性能。

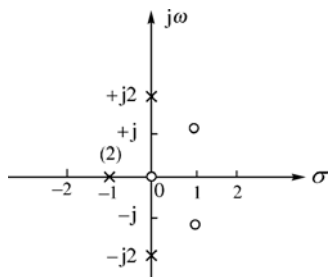


图 6.8 例 6.24 系统的零点、极点图

6.5.3 网络函数的零点、极点与稳定性

1. 由网络函数的零点、极点分布确定冲激响应规律

由于网络函数 $H(s)$ 与冲激响应 $h(t)$ 是一对拉氏变换对,因此根据 $H(s)$ 的零点、极点的分布情况,就可以确定系统冲激响应 $h(t)$ 的变化规律。

对于式(6.56),若所有极点为单极点且 $m < n$,则 $H(s)$ 的展开式可写为

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{s - p_j} \quad (6.57)$$

当激励为冲激信号 $\delta(t)$ 时,对应的冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = \sum_{j=1}^n A_j e^{p_j t} \varepsilon(t) \quad (6.58)$$

式(6.57)和式(6.58)表明,冲激响应的变化规律与 $H(s)$ 的极点在 s 平面上的分布有关,分为以下几种情况:

(1) 若 $H(s)$ 的极点位于 s 平面的左半平面,则 $h(t)$ 为一些指数衰减项的线性叠加,其波形呈衰减形式并趋近于零。

(2) 若 $H(s)$ 的极点位于 s 平面的原点,如 $H(s) = \frac{1}{s}$,则 $h(t) = \varepsilon(t)$,其波形为阶跃函数。

(3) 若 $H(s)$ 的极点位于 s 平面的虚轴上(极点必以共轭形式出现)时,如 $H(s) = \frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j}$,则 $h(t) = [e^{jt} + e^{-jt}] \varepsilon(t) = 2 \cos t \varepsilon(t)$ 。因而, $h(t)$ 的波形呈等幅振荡形式。

(4) $H(s)$ 的极点位于 s 平面的右半平面,则 $h(t)$ 为一些指数增加项的线性叠加,其波形呈增长形式,随着 t 的增长, $h(t) \rightarrow \infty$ 。

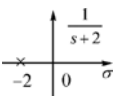
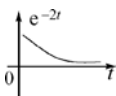
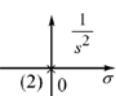
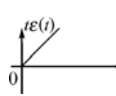
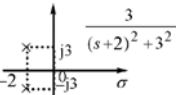
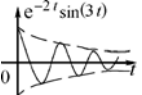
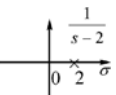
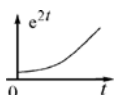
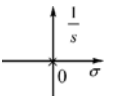
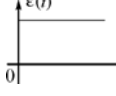
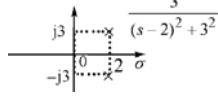
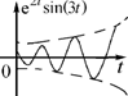
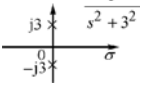
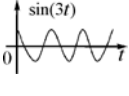
(5) 若 $H(s)$ 的共轭极点位于 s 右半平面,如 $H(s) = \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$,则 $h(t) = e^t \sin t \varepsilon(t)$,其波形呈现增幅振荡;若 $H(s)$ 的共轭极点位于 s 左半平面,如 $H(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$,则 $h(t) = e^{-t} \sin t \varepsilon(t)$,其波形呈现减幅振荡。

(6) 若 $H(s)$ 有 n 重极点,则 $h(t)$ 中将含有 t^{n-1} 因子,如 $H(s) = \frac{1}{s^2}$ 在 $s=0$ 处有二重极点,则 $h(t) = t \varepsilon(t)$ 为斜坡函数;再如 $H(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$ 在虚轴上有两重共轭极点,则 $h(t) = t \sin t \varepsilon(t)$ 为幅度线性增长的振荡函数。

几种 $H(s)$ 的极点分布与冲激响应 $h(t)$ 的波形关系如表 6.4 所示。

此外，由于系统的零点只影响部分分式展开式中各分量的加权系数 K_i ，因此它只影响冲激响应的各分量的幅度和相位，而对 $h(t)$ 的函数变化规律没有影响。

表 6.4 $H(s)$ 的极点分布与冲激响应 $h(t)$ 的波形的关系

$H(s)$ 的极点	$h(t)$ 的波形	$H(s)$ 的极点	$h(t)$ 的波形
			
			
			
			

2. 由网络函数的零点、极点分布确定网络的稳定性

一个网络如果对于有界的激励，其零状态响应也是有界的，则称该网络是稳定的。

对于任意一个线性时不变系统，若激励 $x(t)$ 为有界信号，即 $|x(t)| \leq M_x$ ， M_x 为有界的正数，根据时域卷积分析的结论，其对应的零状态响应 $y(t)$ 为

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

若网络是稳定的，需满足

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \cdot |x(t-\tau)| d\tau \leq M_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \tag{6.59}$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \tag{6.60}$$

对于因果网络的冲激响应，在 $t < 0$ 时， $h(t) = 0$ ，因此式 (6.60) 可改写为

$$\int_0^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \tag{6.61}$$

式 (6.61) 是线性时不变因果系统稳定的充要条件。

由此可见，线性时不变系统稳定的充要条件是冲激响应 $h(t)$ 绝对可积。网络是否稳定取决于系统的本身性质(即网络的冲激响应 $h(t)$ 和网络函数 $H(s)$ 的性质)，与激励 $x(t)$ 的情况无关。

判断网络是否稳定既可以由时域的定义式 (6.60) 进行分析，也可以用 s 域中 $H(s)$ 在 s 平面的零点、极点分布位置来分析。有三种可能的结论：

(1) 稳定

若 $H(s)$ 的全部极点都在 s 平面的左半平面(不含虚轴)，冲激响应只含有多项式加权的指数衰减函

数和多项式加权的指数衰减正弦振荡函数, 则随 t 的增大, 冲激响应 $h(t)$ 趋近于零, 这样的系统称为稳定系统。

(2) 不稳定

若 $H(s)$ 的极点中至少有一个极点在 s 平面的右半平面, 或者在 s 平面的虚轴或原点处有二阶以上的重极点, 则系统冲激响应一定含有指数增长分量或多项式增长分量或多项式加权的指数增长分量或多项式加权的正弦振荡分量或多项式加权的指数增长正弦振荡分量。那么随 t 的增大, $h(t)$ 趋于无限大, 这样的系统称为不稳定系统。

(3) 临界稳定

若 $H(s)$ 在原点或虚轴上有一阶极点, 其余极点都位于 s 平面的左半平面, 这时由于原点处的一阶极点产生阶跃分量, 而虚轴上的一阶共轭极点产生等幅正弦振荡。那么随 t 的增大, $h(t)$ 趋于一个非零值或者呈等幅振荡形式, 这样的系统称为临界稳定系统。

总之, 线性时不变系统稳定的充要条件是: 所有的极点都在 s 左半平面。当虚轴上没有重极点, 并且 s 右半平面无极点时, 系统临界稳定; 当 s 右半平面有极点或虚轴有重极点时, 系统不稳定。

例 6.25 系统函数 $H(s)$ 如下, 试判断各系统的稳定性:

$$(1) H_1(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 6s^2 + 13s + 20}; \quad (2) H_2(s) = \frac{s^3 + s^2 + s + 2}{2s^3 + 7s + 9}; \quad (3) H_3(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s^3 + 5s^2 + 6s}。$$

解: (1) 特征方程为

$$D_1(s) = s^3 + 6s^2 + 13s + 20 = 0$$

即

$$(s+4)(s+1-j2)(s+1+j2) = 0$$

得特征根(也就是极点)为

$$s_1 = -4 \quad s_2 = -1+j2 \quad s_3 = -1-j2$$

它们都有负的实部, 所以网络是稳定的。

(2) 特征方程为

$$D_2(s) = 2s^3 + 7s + 9 = 0$$

即

$$(s+1)(2s^2 - 2s + 9) = (s+1)(s-1-j\sqrt{17})(s-1+j\sqrt{17}) = 0$$

得特征根为

$$s_1 = -1 \quad s_2 = 1+j\sqrt{17} \quad s_3 = 1-j\sqrt{17}$$

显然在 s 平面出现了右半平面的极点, 系统不稳定。

(3) 特征方程为

$$D_3(s) = s^3 + 5s^2 + 6s = s(s+2)(s+3) = 0$$

得特征根为

$$s_1 = 0 \quad s_2 = -2 \quad s_3 = -3$$

显然在 s 平面的原点出现了一阶极点, 而其余两个极点位于 s 平面的左半平面, 因此系统处于临界稳定。

6.5.4 网络函数的零点、极点与频率特性

网络函数 $H(s)$ 的零点、极点分布与系统的频域响应也有着直接的关系。利用网络函数 $H(s)$ 的零点、极点分布规律就可以借助直观的几何作图法对系统的频率响应规律进行定性分析。

若网络函数 $H(s)$ 的极点均位于 s 左半平面, 那么它在虚轴上 ($s = j\omega$) 也收敛, 式 (6.56) 描述的网

络函数可写做 $H(j\omega)$ ，即

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{j=1}^n (j\omega - p_j)} \quad (6.62)$$

上式分子中任意因子 $(j\omega - z_i)$ 和分母中任意因子 $(j\omega - p_j)$ 可以表示为零点矢量与极点矢量：

$$j\omega - z_i = N_i e^{j\varphi_i}, \quad j\omega - p_j = M_j e^{j\theta_j}$$

式中， N_i 、 M_j 分别为零点、极点矢量的模； φ_i 、 θ_j 分别为零点、极点矢量与实轴的夹角，如图 6.9 所示，则式 (6.62) 可表示为

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H_0 \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} \frac{e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)}}{e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}} \\ &= H_0 \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m - \theta_1 - \theta_2 - \cdots - \theta_n)} \end{aligned} \quad (6.63)$$

其幅频特性为

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^m N_i}{\prod_{j=1}^n M_j} \quad (6.64)$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \quad (6.65)$$

由图 6.9 可见，当 $j\omega$ 从零沿着虚轴移动至无穷大时，极点矢量的模和辐角都将随之变化，于是得出幅频特性和相频特性曲线。

例 6.26 利用系统函数的零极点图分析如图 6.10 所示电路的频率特性。

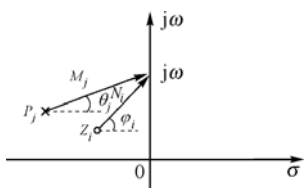


图 6.9 零点、极点矢量表示

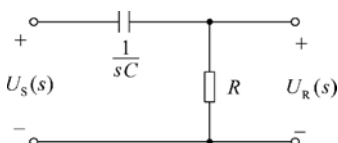


图 6.10 例 6.26 图

解：由图 6.10 得电路的系统函数为

$$H(s) = \frac{U_R(s)}{U_s(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

$H(s)$ 具有零点 $z_1 = 0$ ，极点 $p_1 = -\frac{1}{RC}$ ，零点、极点矢量图如图 6.11 所示。因此

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}} = \frac{N_1 e^{j\varphi_1}}{M_1 e^{j\theta_1}}$$

其幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{N_1}{M_1}$$

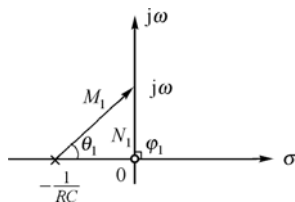


图 6.11 例 6.26 零点、极点矢量图

相频特性为

$$\varphi(\omega) = \varphi_1 - \theta_1 = 90^\circ - \theta_1$$

当 $\omega = 0$ 时, $N_1 = 0$, $M_1 = \frac{1}{RC}$, $\theta_1 = 0$, 则 $|H(0)| = 0$, $\varphi(0) = 90^\circ$

当 $\omega = \frac{1}{RC}$ 时, $N_1 = \frac{1}{RC}$, $M_1 = \frac{\sqrt{2}}{RC}$, 则 $\left|H\left(\frac{1}{RC}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi\left(\frac{1}{RC}\right) = 45^\circ$

当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $\frac{N_1}{M_1} \rightarrow 1$, $\theta_1 = 90^\circ$, 则 $|H(\omega)| = 1$, $\varphi(\infty) = 0^\circ$

将以上讨论情况绘制成幅频特性曲线和相频特性曲线, 如图 6.12 所示。显然, 这是高通滤波器。

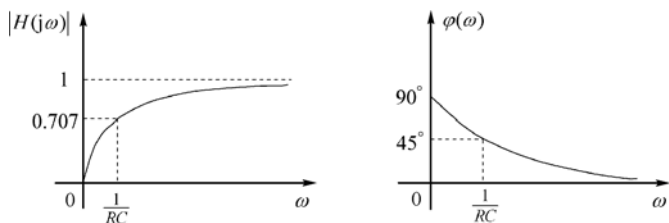


图 6.12 例 6.26 高通滤波器的幅频特性曲线和相频特性曲线

6.6 Multisim 复频域分析

Multisim 提供了多种分析功能, 如交流频率分析、零极点分析、传递函数分析等, 可以很方便地对网络的指定输入输出关系进行测量和分析。

例 6.27 如图 6.13 所示为某立体声放大器的一个通道中的高、低频扬声器功率分配电路, 若每个扬声器的等效电阻为 $8\ \Omega$ 。

(1) 若高、低频滤波电路的截止频率均为 $3\ \text{kHz}$, 试确定电路中电容 C 和电感 L 的元件值。

(2) 利用 AC 频率扫描分析求出两个扬声器电压的频率响应曲线, 验证计算结果。

解: (1) 对于 R_1 、 L 构成的分支电路, 其网络函数为

$$H_1(s) = \frac{U_{R_1}(s)}{U_s(s)} = \frac{R_1}{R_1 + sL} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R_1}s}$$

对应的截止频率应满足

$$f_{1c} = \frac{R_1}{2\pi L} = 3\ \text{kHz}$$

由此解得

$$L = \frac{R_1}{2\pi f_{1c}} = 0.424\ \text{mH}$$

对于 R_2 、 C 构成的分支电路, 其网络函数为

$$H_2(s) = \frac{U_{R_2}(s)}{U_s(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2Cs}{1 + R_2Cs}$$

对应的截止频率应满足

$$f_{2c} = \frac{1}{2\pi R_2 C} = 3\ \text{kHz}$$

由此解得

$$C = \frac{1}{2\pi f_{2c} R_2} = 6.63 \mu\text{F}$$

(2) 在 Multisim 中建立仿真电路如图 6.14 所示。执行“Simulate”→“Analyses”→“AC Analysis”命令,按照如图 6.15 所示设置频率参数,单击“Output variables”选项卡,按照如图 6.16 所示设置需要观察的输出变量。

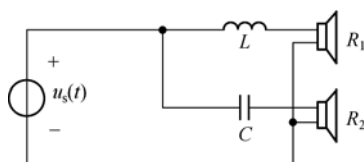


图 6.13 例 6.27 电路

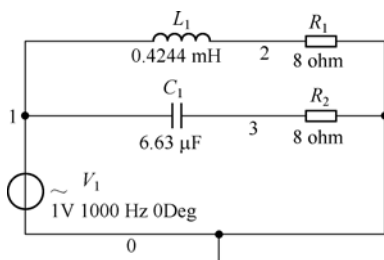


图 6.14 例 6.27 仿真电路

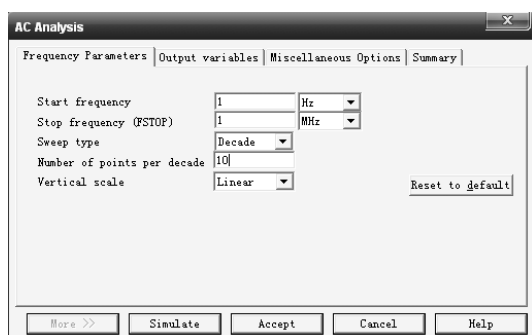


图 6.15 AC Analysis 频率参数的设置

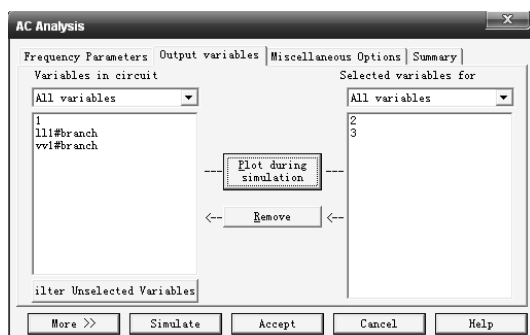


图 6.16 AC Analysis 输出变量的设置

(3) 单击“Simulate”按钮,启动 AC 频率扫描分析,可得该电路在节点 2 和节点 3 上的频率响应,如图 6.17 所示。可以看到,两条频响曲线的交点处对应的频率为 $f = 3 \text{ kHz}$, 幅度增益约为 0.7, 与上述理论分析结论相吻合。

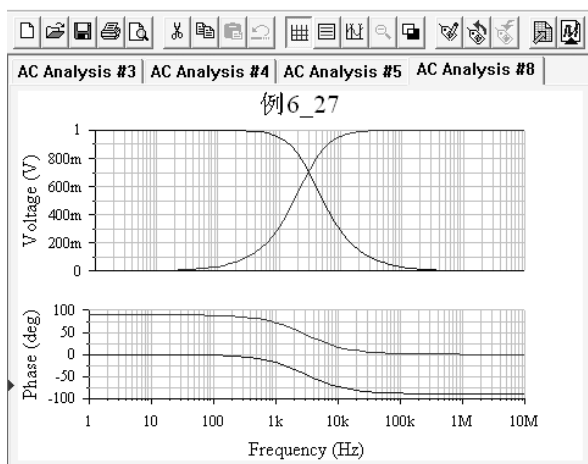


图 6.17 电压传递函数的频响

例 6.28 电路如图 6.18 所示。试求：

- (1) 该电路的网络函数 $H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ ，并计算其零点、极点；
- (2) 用 Multisim 的 AC 频率扫描分析结果判断该网络的频响类型、截止频率及带宽 B ；
- (3) 用 Multisim 的零点、极点分析验证理论计算。

解：(1) 该电路的网络函数为

$$\begin{aligned}
 H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} &= \frac{\frac{R_1 \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C_2 s}}}{\frac{1}{C_1 s} + \frac{R_1 \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C_2 s}}} \cdot \frac{1}{R_2 + \frac{1}{C_2 s}} \\
 &= \frac{\frac{R_1 (R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 + R_2) C_2 s + 1}}{\frac{1}{C_1 s} + \frac{R_1 (R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 + R_2) C_2 s + 1}} \cdot \frac{1}{R_2 C_2 s + 1} \\
 &= \frac{R_1 C_1 s}{(R_1 + R_2) C_2 s + 1 + R_1 (R_2 C_2 s + 1) C_1 s} \\
 &= \frac{R_1 C_1 s}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + [(R_1 + R_2) C_2 + R_1 C_1] s + 1}
 \end{aligned}$$

将元件参数值代入，可求得该网络函数具有极点

$$p_{1,2} = \frac{-4 \times 10^{-3} \pm \sqrt{(-4 \times 10^{-3})^2 - 4 \times 2 \times 10^{-6}}}{2 \times 2 \times 10^{-6}}$$

即

$$p_1 = -1.707 \times 10^3$$

$$p_2 = -292.89$$

该网络的零点为 $z_1 = 0$ 。

(2) 按图 6.19 所示建立仿真电路，执行“Simulate”→“Analyses”→“AC Analysis”命令，按照如图 6.20 所示设置频率参数，单击“Output variables”选项卡，按照如图 6.21 所示设置需要观察的输出变量。

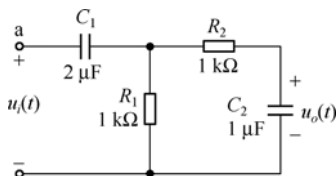


图 6.18 例 6.28 电路

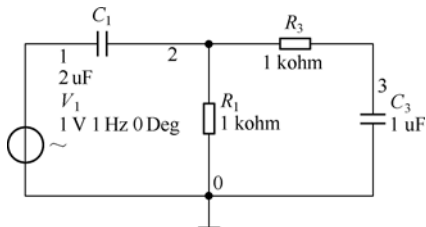


图 6.19 例 6.28 仿真电路

单击“Simulate”按钮，启动 AC 频率扫描分析，可得该电路在节点 3 上的频率响应，如图 6.22 所示。可以看到该网络的频率特性为带通滤波。



图 6.20 AC Analysis 频率参数的设置

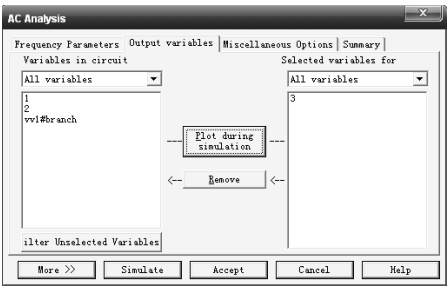


图 6.21 AC Analysis 输出变量的设置

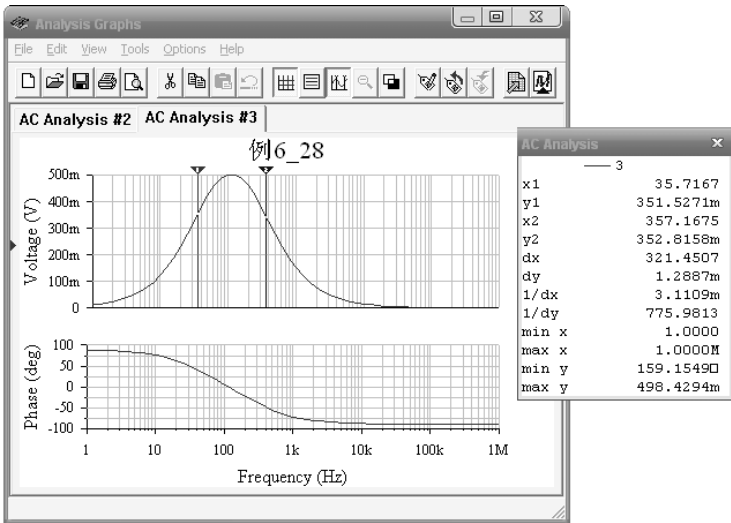



图 6.22 电压传递函数的频响

根据截止频率的定义，当幅度增益下降到通带幅度的 0.707 倍时，即 $500 \times 0.707 = 353.5 \text{ mV}$ 处，对应的频率为截止频率。仿真时点击游标的图标，并将 1、2 两个游标分别拖动到上升沿和下降沿中接近 353.5mV 的位置处，这时可以从分析的结果列表中读出 $f_{c1} \approx 35.72 \text{ Hz}$ ， $f_{c2} \approx 357.17 \text{ Hz}$ 。因此，带宽 $B = f_{c2} - f_{c1} \approx 321.45 \text{ Hz}$ 。

(3) 执行“Simulate”→“Analyses”→“Pole-zero”命令，设定分析类型为电压增益 (Gain Analyses)，按照图 6.23 所示设定输入输出节点，单击“Simulate”按钮，启动分析，分析结果如图 6.24 所示。可以看到，与理论分析结论相符。

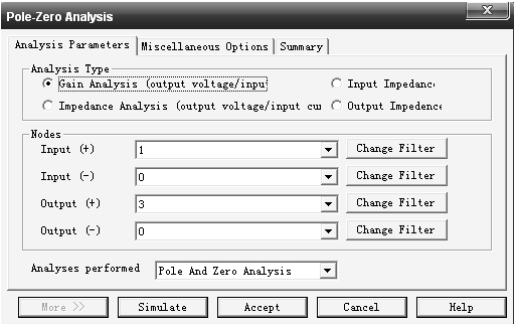


图 6.23 零点、极点分析参数设置图

Pole Zero Analysis	Real	Imaginary
pole (1)	-1.70711k	0.00000
pole (2)	-292.89322	0.00000
zero (1)	0.00000	0.00000

图 6.24 零点、极点分析结果

小结

1. 拉普拉斯变换的定义与收敛域

非周期信号的双边拉普拉斯变换是用指数衰减信号 $e^{-\sigma t}$ 加权后的信号的傅里叶变换, 它将信号分解为无穷多个复指数分量的叠加, 定义式如下:

$$\begin{aligned} F\{f(t)e^{-\sigma t}\} &= F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

相应地, 拉普拉斯反变换定义式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

称 $F(s)$ 为象函数, $f(t)$ 为原函数, $F(s)$ 和 $f(t)$ 构成一对拉普拉斯变换对, 记为

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

对于因果信号, 其单边拉普拉斯变换及反变换定义为

$$\begin{aligned} F(s) &= L[f(t)\varepsilon(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ f(t) &= L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad t > 0 \end{aligned}$$

使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积条件的 σ 值的取值范围, 称做上述拉普拉斯变换的收敛域, 即

$$\int_0^{+\infty} |e^{-\sigma t} f(t)| dt < +\infty$$

实际信号大多都是因果信号, 其单边拉氏变换一定存在, 即总能找到一个足够大的 σ_0 值, 使信号 $f(t)$ 满足上面的收敛域要求。

2. 拉普拉斯变换的性质

与傅里叶变换类似, 拉普拉斯变换也有许多性质, 它们在求解拉普拉斯变换和反变换中有重要的作用。常见的性质如下:

线性特性	$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \leftrightarrow k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$
尺度变换	$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$
时移特性	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad t_0 > 0$
频移特性	$e^{s_0 t} f(t) \leftrightarrow F(s-s_0)$
时域微分性	$f'(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-)$ $f^{(n)}(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}f'(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-)$
时域积分性	$\int_0^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$ $\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0_-)}{s}$

式中

$$f^{-1}(0_-) = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \Big|_{t=0_-}$$

3. 拉普拉斯反变换的部分分式展开法

从象函数 $F(s)$ 求原函数 $f(t)$ 的过程称为拉普拉斯反变换。部分分式展开法是一种将复杂变换分解为许多简单变换式之和, 然后通过查表求取原函数的方法。

(1) 当 $F(s)$ 为有理真分式, 且 $F(s)$ 具有单极点时, 则

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i}$$

其中待定系数为

$$K_i = (s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \quad i=1, 2, \cdots, n$$

(2) 当 $F(s)$ 有重极点时, 则

$$F(s) = \frac{K_{1k}}{(s-p_1)^k} + \frac{K_{1(k-1)}}{(s-p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{K_{11}}{s-p_1} + \frac{K_{k+1}}{s-p_{k+1}} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n}$$

其中待定系数为

$$K_{im} = \frac{1}{(k-m)!} \left\{ \frac{d^{k-m}}{ds^{k-m}} [(s-p_1)^k F(s)] \right\} \Big|_{s=p_1} \quad m=1, 2, \cdots, k$$

4. 线性系统的复频域分析

以拉普拉斯变换为数学工具, 分析任意信号作用下的线性电路响应, 称为线性系统的复频域分析。

(1) 由描述激励与响应关系的微分方程入手的 s 域分析

对微分方程两边取拉普拉斯变换, 得到复频域的代数方程, 解方程得到响应的复频域解, 最后通过拉普拉斯反变换得到响应的时域解。

(2) 由电路的复频域模型入手的 s 域分析

将信号源及各分析变量用其拉普拉斯变换式代替, 电路中的元件用对应复频域模型代替, 就得到时域电路对应的复频域模型。

由电路的复频域模型, 应用线性电路分析方法求出响应的复频域解, 再进行拉普拉斯反变换得到响应的时域解。

5. 网络函数与网络特性

零状态条件下系统响应的象函数与激励信号的象函数之比为系统的网络函数, 也称系统函数, 用 $H(s)$ 表示, 即

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

网络函数只与系统的结构、元件参数等有关, 与激励及初始值无关。网络函数 $H(s)$ 与系统的单位冲激响应 $h(t)$ 是一对拉普拉斯变换对。

网络函数的零点、极点分布与系统的时域特性和频域特性有着密切的关系。可以运用网络函数的零点、极点分布判断网络的稳定性:

(1) 当 $H(s)$ 的全部极点都在 s 平面的左半平面 (不含虚轴) 时, 网络是稳定系统;

(2) 当 $H(s)$ 的极点中至少有一个极点在 s 平面的右半平面, 或者在 s 平面的虚轴或原点处有二阶以上的重极点时, 网络是不稳定系统;

(3) 当 $H(s)$ 在原点或虚轴上有一阶极点, 其余极点都位于 s 平面的左半平面时, 网络是临界稳定系统。

习题6

6.1 试用拉普拉斯变换的定义式,求下列函数的拉普拉斯变换。

- | | |
|---|---|
| (1) $\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$ | (2) $t e^{-t} \varepsilon(t)$ |
| (3) $t \cos \omega_0 t \varepsilon(t)$ | (4) $(e^{2t} - 2e^{-t}) \varepsilon(t)$ |
| (5) $(\cos 3t + 2\sin 3t) \varepsilon(t)$ | (6) $(1 - e^{-2t}) \varepsilon(t)$ |
| (7) $2\delta(t-1)$ | (8) $e^{-2t} \cos 5t \varepsilon(t)$ |

6.2 试用拉普拉斯变换的性质,求下列函数的拉普拉斯变换。

- | | |
|---|--|
| (1) $f(t) = t e^{-(t-2)} \varepsilon(t-1)$ | (2) $f(t) = t e^{-t} \sin t \varepsilon(t)$ |
| (3) $f(t) = (t+1) \varepsilon(t+1)$ | (4) $f(t) = t^3 \cos 3t \varepsilon(t)$ |
| (5) $f(t) = \frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{t} \varepsilon(t)$ | (6) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t} \varepsilon(t)$ |

6.3 求下列函数的单边拉氏变换。

- | | | | |
|------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| (1) $e^{-2t} \varepsilon(t)$ | (2) $e^{-2t} \varepsilon(t-1)$ | (3) $e^{-2(t-1)} \varepsilon(t)$ | (4) $e^{-2(t-1)} \varepsilon(t-1)$ |
|------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|

6.4 求如图 6.25 所示信号的拉氏变换。

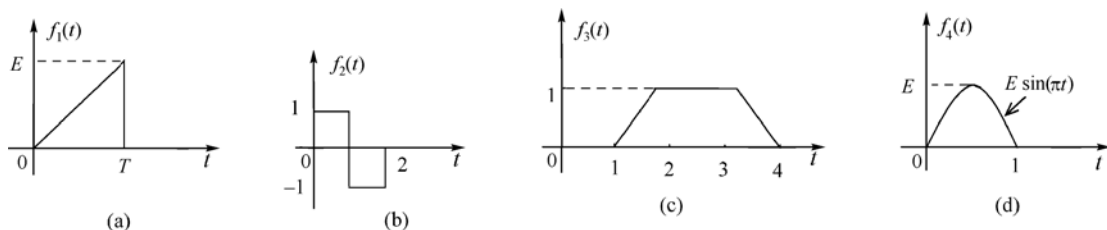


图 6.25

6.5 利用拉普拉斯变换的基本性质,求下列函数的拉氏变换。

- | | |
|---|--|
| (1) $t^2 + 2t$ | (2) $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| (3) $1 + (t-2)e^{-t}$ | (4) $t^2 e^{-at}$ |
| (5) $e^{-t} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)]$ | (6) $5e^{-2t} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| (7) $e^{-2t} + e^{-(t-1)} \varepsilon(t-1) + \delta(t-2)$ | (8) $\frac{d}{dt} [\sin 2t \varepsilon(t)]$ |

6.6 已知因果信号 $f(t)$ 的象函数为 $F(s)$,求下列 $F(s)$ 的原函数 $f(t)$ 的初值 $f(0_+)$ 和终值 $f(\infty)$ 。

- | | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| (1) $F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$ | (2) $F(s) = \frac{s+3}{s^2+6s+10}$ | (3) $F(s) = \frac{2}{s(s+2)^2}$ |
|-------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|

6.7 求下列象函数反变换 $f(t)$ 的初值。

- | | |
|--|---|
| (1) $F(s) = \frac{1}{s+2}$ | (2) $F(s) = \frac{s^4+1}{s^2(s+2)}$ |
| (3) $F(s) = \frac{s^2+s}{2s^2+2s+1}$; | (4) $F(s) = \frac{-4s^2+3}{s^3+s^2+3s+3}$ |

6.8 求下列各象函数反变换 $f(t)$ 的终值。

$$(1) F(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$$(2) F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2(s^2 + 4)}$$

$$(3) F(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

$$(4) F(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 1}{(s-1)(s-3)(s+5)}$$

6.9 用拉普拉斯变换性质, 求下列象函数的原函数。

$$(1) F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$(2) F(s) = \frac{e^{-sT}}{(s+1)^2}$$

$$(3) F(s) = \frac{2}{(s+a)^3}$$

$$(4) F(s) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$$

6.10 用部分分式展开法求下列象函数的拉氏反变换。

$$(1) \frac{2s+6}{s(s+2)}$$

$$(2) \frac{s+3}{s^2+7s+10}$$

$$(3) \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

$$(4) \frac{s^2+10s+19}{s^2+5s+6}$$

$$(5) \frac{2s^2+s+2}{s(s^2+1)}$$

$$(6) \frac{4}{s(s+2)^2}$$

$$(7) \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

$$(8) \frac{s^3+s^2+1}{(s+2)(s+1)}$$

6.11 应用拉普拉斯变换的性质, 证明下列变换对成立。

$$(1) t \sin \omega t \leftrightarrow \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$(2) e^{-bt} f\left(\frac{t}{b}\right) \leftrightarrow bF(bs + b^2)$$

$$(3) t^2 e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{2}{(s+\alpha)^3}$$

$$(4) e^{-\frac{t}{b}} f\left(\frac{t}{b}\right) \leftrightarrow bF(bs + 1)$$

6.12 试用拉普拉斯变换分析法, 求解下列微分方程。

$$(1) y'(t) + 2y(t) = 2x(t), y(0_-) = 0, x(t) = \varepsilon(t)$$

$$(2) y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t), y(0_-) = y'(0_-) = 0, x(t) = \varepsilon(t)$$

$$(3) y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = x'(t) + x(t), y(0_-) = 2, y'(0_-) = 1, x(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$$

$$(4) y''(t) + 6y'(t) + 25y(t) = x'(t), y(0_-) = y'(0_-) = 0, x(t) = 4\varepsilon(t)$$

6.13 已知某线性时不变系统可用下列微分方程描述

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t)$$

若 $f(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$, $y'(0_-) = 1$, $y(0_-) = -1$, 试求该系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$, 零状态响应 $y_{zs}(t)$ 及全响应 $y(t)$ 。

6.14 某线性时不变系统输入为 $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$, 零状态响应为 $y_{zs}(t) = (e^{-t} - e^{-2t} + 3e^{-3t})\varepsilon(t)$, 求系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。若 $y'(0_-) = 1$, $y(0_-) = 2$, 求零输入响应及全响应。

6.15 图 6.26 所示电路, 已知 $i_L(0_-) = 2\text{ A}$, $u_C(0_-) = 1\text{ V}$, $u_s(t) = \varepsilon(t)\text{ V}$, 求电压 $u(t)$ 的零状态响应 $u_{zs}(t)$ 、零输入响应 $u_{zi}(t)$ 和全响应 $u(t)$ 。

6.16 图 6.27 所示电路, 已知初始电流 $i(0_-) = 1\text{ A}$, 电压源为 $u_s(t) = e^{-t}\varepsilon(t)\text{ V}$, 求电感电压 $u_L(t)$ 。

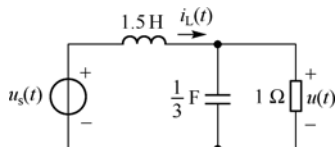


图 6.26

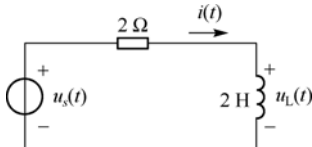


图 6.27

6.17 电路如图 6.28 所示。已知电路在 $t < 0$ 时已经进入稳态, 开关 K 在 $t = 0$ 时断开, 用 s 域分析法求开关断开后的 $u_L(t)$ 。

6.18 如图 6.29 所示电路, 开关动作前电路已稳定。 $t=0$ 时, 断开开关 K, 当 $t \geq 0$ 时, 试求电路中的电流 $i(t)$ 。

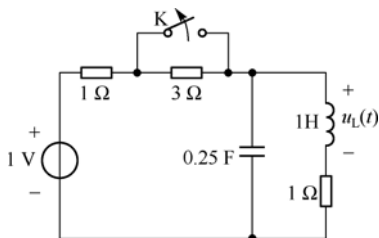


图 6.28

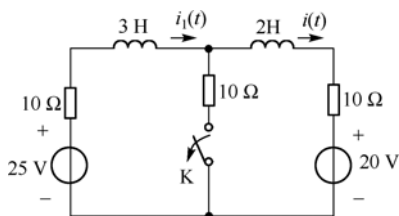


图 6.29

6.19 某放大器电路如图 6.30 所示, 已知输出 $u_o(t)$ 与差分输入 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 之间满足关系式 $u_o(t) = A[u_2(t) - u_1(t)]$, 用 s 域分析法求电路传递函数 $H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ (放大器的输入端阻抗为无穷大, 输出端阻抗为零)。

6.20 已知某系统函数 $H(s)$ 的零点、极点分布如图 6.31 所示, 且 $h(0_+) = 1$, 求系统单位冲激响应 $h(t)$ 。

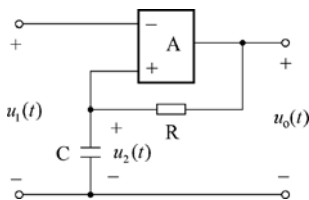


图 6.30

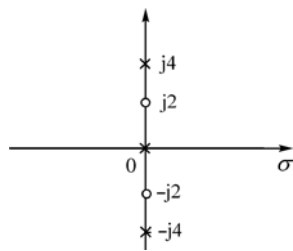


图 6.31

6.21 有一线性时不变系统的网络函数 $H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$ 。

(1) 求系统的单位冲激响应 $h(t)$;

(2) 若输入信号为 $f(t) = e^{-5t} \varepsilon(t)$, 求系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。

6.22 画出下列系统的零点、极点分布图, 哪个系统是稳定的系统?

(1) $H(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2+1}$

(2) $H(s) = \frac{s^2}{(s+2)(s^2+2s-3)}$

(3) $H(s) = \frac{s-2}{s(s+1)}$

(4) $H(s) = \frac{2(s^2+4)}{s(s+2)(s^2+1)}$

(5) $H(s) = \frac{16}{s^2(s+4)}$

(6) $H(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2+1)^2}$

6.23 求下列系统的网络函数、微分方程及系统的阶数, 并判断系统是否稳定。

(1) $h(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$

(2) $h(t) = (1 - e^{-2t}) \varepsilon(t)$

(3) $h(t) = te^{-t} \varepsilon(t)$

(4) $h(t) = 0.5 \delta(t)$

(5) $h(t) = \delta(t) - e^{-t} \varepsilon(t)$

(6) $h(t) = (e^{-t} + e^{-2t}) \varepsilon(t)$

附录 A Multisim 2001 软件简介

A.1 Multisim 2001 界面主窗口简介

运行 Multisim 2001 主程序后，在计算机屏幕上出现 Multisim 2001 的主工作窗口，如图 A.1 所示，主要由菜单栏、系统工具栏、设计工具栏、元件工具栏、仪表栏、电路窗口、仿真开关、状态栏等组成。

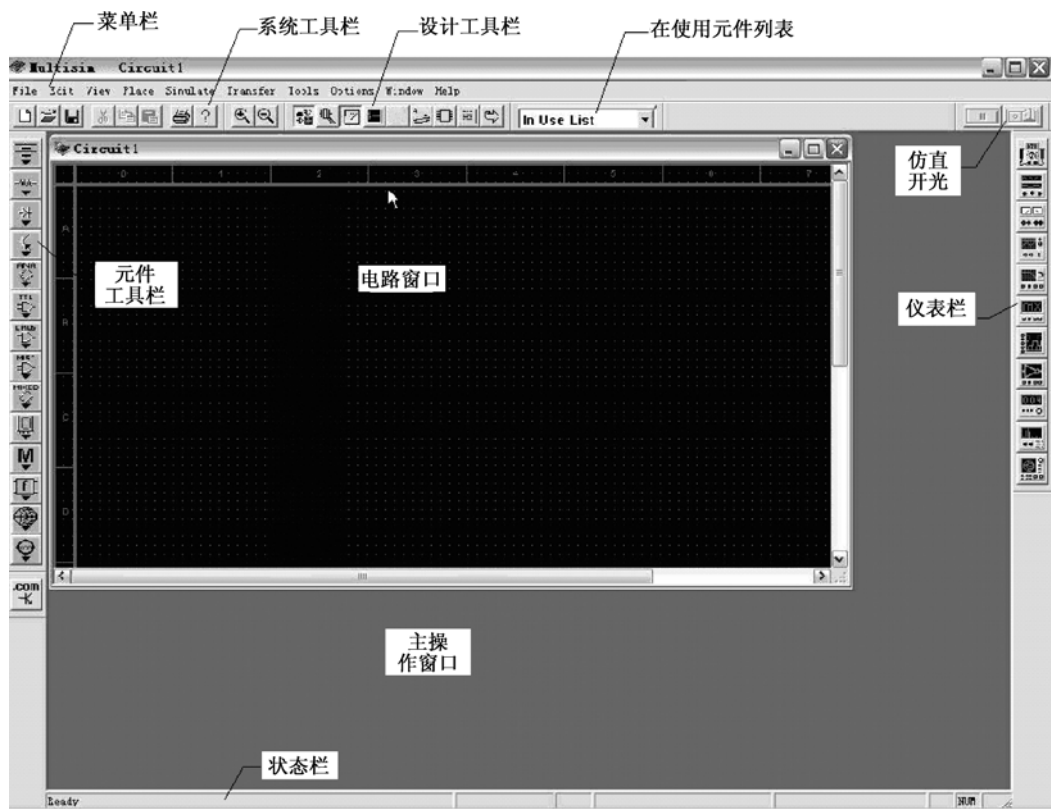


图 A.1 Multisim 2001 的主窗口

1. 菜单栏

包含 File、Edit、View、Place、Simulate、Transfer、Tools、Options、Help 等 9 个主菜单。

(1) 文件 (File)：主要用于管理所创建的电路文件，其中包含 Open、New、Save、Print 等与 Windows 相同的基本文件操作命令；另有 Recent Files 和 Recent Projects，使用户可以方便地调出最近使用过的文件和项目。菜单中有关打印的几个选项是 Multisim 2001 特有的，其中：

Print Circuit：打印当前工作区的电路原理图，其中包括 Print (打印)、Print Preview (打印预览) 和 Print Circuit Setup (打印电路设置) 命令。

Print Reports：列表打印当前工作区内所编辑的电路图中的元器件或元件库 (Database Family List) 或元器件的详细资料 (Component Detail Report)。

Print Instruments：选择打印当前工作区内的仪表波形图。

(2) Edit: 包含一些最基本的编辑操作命令, 如 Cut(剪切)、Copy(拷贝)、Paste(粘贴)、Undo(撤销)等命令; 元件的位置操作命令, 如可以使元件进行旋转和对称操作的 Flip Horizontal(水平翻转)、Flip Vertical(垂直翻转)、90Clockwise(顺时针转 90 度)、90CounterCW(逆时针转 90 度)等命令。

(3) View: 包括调整窗口视图的命令, 用于添加或去除工具条、元件库栏、状态栏, 在窗口界面中显示网格, 以提高在电路搭接时元件相互位置的准确度; 放大或缩小视图的尺寸及设置各种显示元素等。其中:

Toolbars: 显示或关闭工具栏。

Component Bars: 显示或关闭元件库。

Status Bar: 显示或关闭状态栏。

Show Simulation Error Log/Audit Trail: 显示仿真的错误记录/检查仿真踪迹。

Show XSpice Command Line Interface: 显示或关闭 XSpice 命令行界面。

Show Grapher: 显示或关闭图表。

Show Simulate Switch: 显示或关闭仿真开关。

Show Text Description Box: 显示或关闭文本描述框。

Show Grid: 显示或关闭栅格。

Show Page Bounds: 显示或关闭纸张边界。

Show Title Block and Border: 显示或关闭标题栏和边界。

Zoom In: 放大显示视图。

Zoom Out: 缩小显示视图。

Find: 查找电原理图中的元件。

(4) Place: 通过本菜单中的各项命令可在窗口中放置各种电路对象, 其中:

Place Component: 放置一个元件。

Place Junction: 放置一个节点。

Place Bus: 放置一根总线。

Place Input/Output: 放置一个输入/输出端。

Place Text: 放置文本。

Place Text Description Box: 放置一个文本描述框。

Replace Component: 替换元件。

Place as Subcircuit: 放置一个子电路。

Replace by Subcircuit: 用一个子电路替代。

(5) Simulate: 提供仿真所需的各种设备及方法。

Run: 运行仿真开关。

Pause: 暂停电路开关。

Default Instrument Setting: 默认仪表设置。

Digital Simulation Setting: 数字仿真设置。

Instruments: 提供仿真所需各种仪表。

Analyses: 选择仿真分析方法。

Postprocess: 打开后处理器对话框。

VHDL Simulation: VerilogHDL 仿真。

Auto Fault Option: 自动设置电路故障。

Global Component Tolerance: 全局元件容错设置。

(6) Transfer: 用以将所建电路及分析结果传输给其他应用程序, 如 PCB、MathCAD 和 Excel 等。其中:

Transfer to Ultiboard: 将电路图传送到 Ultiboard。

Transfer to other PCB Layout: 将电路图传送给其他 PCB 版图软件。

Backannotate from Ultiboard: 从 Ultiboard 返回的注释。

Export Simulation Results to MathCAD: 仿真分析的结果输出到 MathCAD。

Export Simulation Results to Excel: 仿真分析的结果输出到 Excel。

Export Netlist: 输出网表。

(7) Tools: 用于创建、编辑、复制、删除元件, 可管理、更新元件库等, 其中:

Create Component: 打开创建元件对话框。

Edit Component: 打开元件编辑对话框。

Copy Component: 打开拷贝元件对话框。

Delete Component: 打开删除元件对话框。

Database Management: 打开元件库管理对话框。

Update Component: 升级更新元件。

Remote Control/Design Sharing: 远程控制/设计共享。

EDAprts.com: 连接 EDAparts.com 网站。

(8) Options: 可对程序的运行和界面进行设置, 其中:

Preferences: 设置操作环境。

Modify Title Block: 编辑标题栏内容。

Simplified Version: 简化版本。

Global Restrictions: 全局限制设置。

Circuit Restrictions: 电路限制设置。

(9) Help: 提供帮助文件, 按下键盘上的 F1 键也可获得帮助。

Multisim Help: 主题目录。

Multisim Reference: 主题索引。

Release Notes: 版本注释。

About Multisim: 有关 Multisim 的说明。

2. 系统工具栏

系统工具栏中基本是与 Windows 的同类按钮类似的功能按钮, 不再赘述, 如图 A.2 所示。

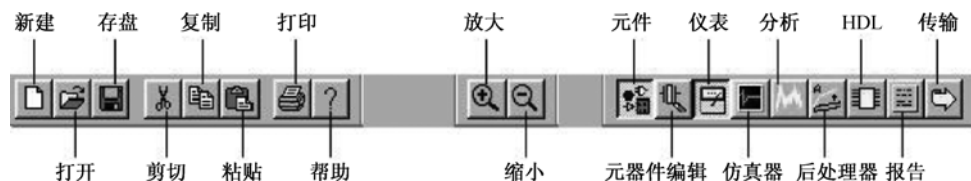


图 A.2 系统工具栏

3. 设计工具栏

设计工具栏是 Multisim 2001 的核心, 使用它可进行电路的建立、仿真、分析, 并最终输出设计数据(虽然菜单栏中也已包含了这些设计功能, 但使用该设计工具栏进行电路设计将更方便快捷)。设计工具栏按钮共有 9 个, 从左至右分别是:

元件(Component)按钮：用以确定存放元器件模型的元件工具栏是否放到电路界面上。

元件编辑器(Component Editor)按钮：调整或增加元件。

元件(Instruments)按钮：用以给电路添加仪表或观察仿真结果。

仿真(Simulate)按钮：用以确定开始、暂停或结束电路仿真。

分析(Analysis)按钮：选择要进行的分析。

后处理(Postprocessor)按钮：用以进行对仿真结果的进一步操作。

VHDL/Verilog 按钮：用以使用 VHDL/Verilog 模型进行设计。

报告(Reports)按钮：打印相关电路的报告。

传输(Transfer)按钮：与其他程序如 Ultiboard 进行通信，也可将仿真结果输出到像 MathCAD 和 Excel 这样的应用程序。

4. 仿真开关(Simulate Switch)

用以控制仿真的进程。

5. 元(器)件工具栏(Component Toolbar)

如图A.3所示，实际上是用户在电路仿真中可以使用的所有元器件符号库，它与 Multisim 2001 的元器件模型库对应，共有 14 个分类库，每个库中放置着同一类型的元件。在取用其中的某一个元器件符号时，实质上是调用了该元器件的数学模型。

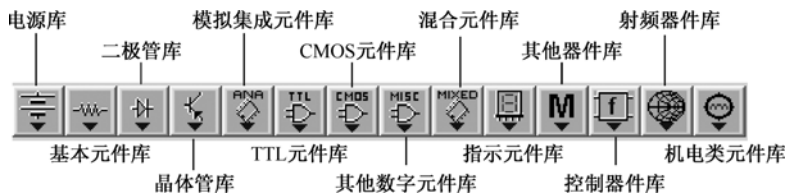


图 A.3 元(器)件工具栏

(1) 电源(Source)库，该库对应元器件系列(Family)，如图 A.4 所示。

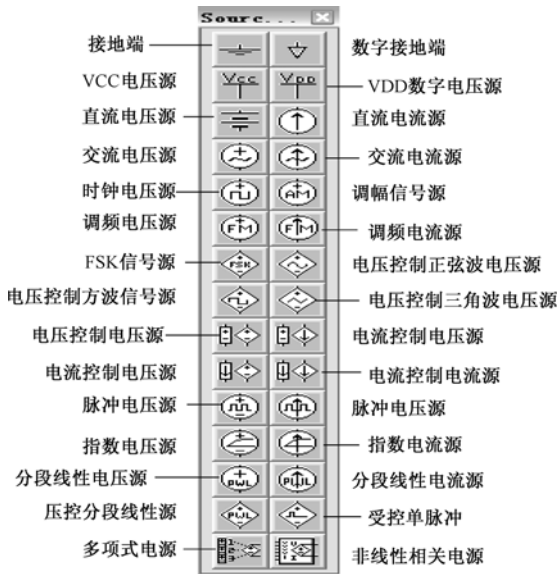


图 A.4 电源库

(2) 基本元件(Basic)库

该库包含现实元件箱 18 个, 虚拟元件箱 7 个, 如图 A.5 所示。虚拟元件箱中的元件(带绿色衬底者)不需要选择, 而是直接调用, 然后再通过其属性对话框设置其参数值。不过, 在选择元件时还是应该尽量到现实元件箱中去选取, 这不仅是因为选用现实元件能使仿真更接近于现实情况, 还因为现实的元件都有元件封装标准, 可将仿真后的电路原理图直接转换成 PCB 文件。但在选取不到某些参数, 或者要进行温度扫描或参数扫描等分析时, 就要选用虚拟元件。

基本元件库中的元件均可通过其属性对话框对其参数进行设置。现实元件和虚拟元件选取方法有所不同, 下面以电阻元件为例说明。

双击图 A.5 中的现实电阻器元件图标, 可得到图 A.6 所示的对话框。其中给出该器件的若干信息如名称、符号、制造商、模型层次等。选定左边的元件名称列表中的 1.8 kohm(即 1.8 k Ω), 单击对话框上的“OK”按钮, 这时电阻符号随光标移动, 在需要放置该器件的地方单击左键, 1.8 kohm 的现实电阻即被选取。

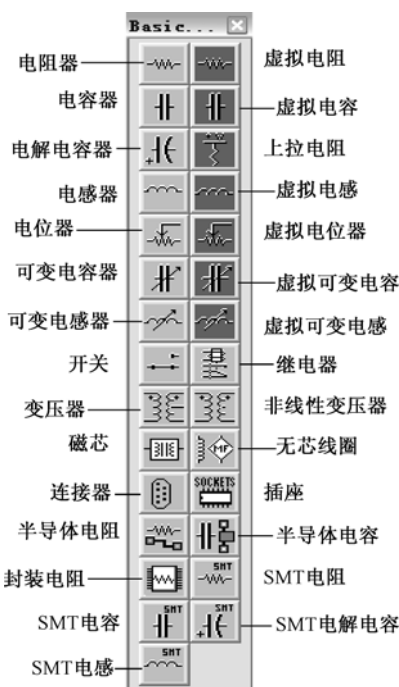


图 A.5 基本元件库

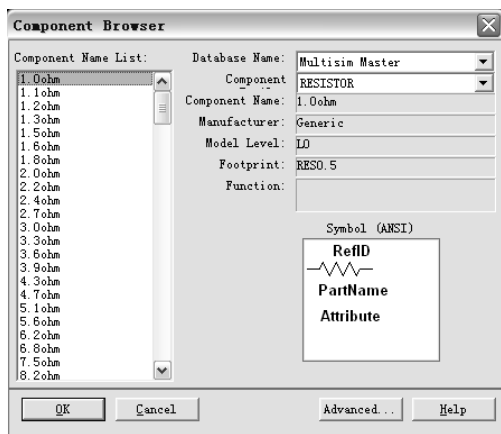


图 A.6 电阻元件对话框

如若选取 1.8 k Ω 的虚拟电阻, 点击绿色衬底的电阻图标, 一个电阻符号就随光标带入电路窗口, 在需要放置该器件的地方单击左键, 即出现 1.8 kohm 的虚拟电阻。随后, 双击该电阻图标, 打开其属性对话框如图 A.7 所示。通过此对话框, 不仅可以设置所需的电阻值, 还可以设置容差、环境温度、故障、标识等。

(3) 二极管(Diodes Components)

二极管库中包含 10 个元件箱, 如图 A.8 所示。该图中虽然仅有一个虚拟元件箱, 但发光二极管元件箱中存放的是 Interactive Component(交互式元件), 其处理方式基本等同于虚拟元件(只是其参数无法编辑)。

发光二极管有 6 种不同颜色, 使用时应注意, 该元件只有正向电流流过时才产生可见光, 其正向压降比普通二极管大。红色 LED 正向压降约为 1.1~1.2 V, 绿色 LED 的正向压降约为 1.4~1.5 V。

(4) 晶体管 (Transistors Components) 库

该库共有 30 个元件箱，如图 A.9 所示。其中，14 个现实元件箱中的元件模型对应世界主要厂家生产的众多晶体管元件，具有较高精度。另外 16 个带绿色背景的虚拟晶体管相当于理想晶体管，其参数具有默认值，也可打开其属性对话框，单击“Edit Model”按钮，在“Edit Model”对话框中对参数进行修改。

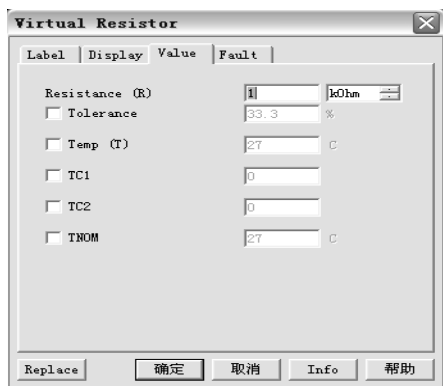


图 A.7 虚拟电阻属性对话框

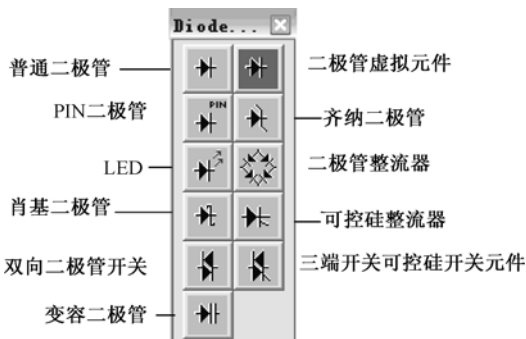


图 A.8 二极管库



图 A.9 晶体管库

(5) 模拟元件(Analog Components)库，该库对应元件系列如图 A.10 所示。

(6) TTL 元(器)件(TTL)库

该库对应元件系列如图 A.11 所示。

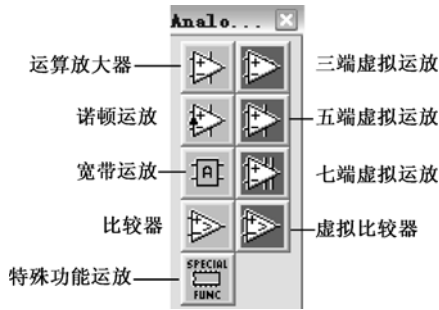


图 A.10 模拟元件库

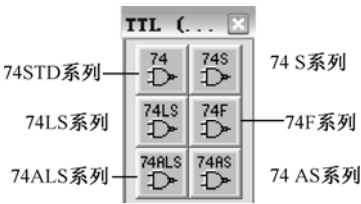


图 A.11 TTL 元件库

使用 TTL 元件库时，器件逻辑关系可查阅相关手册或利用 Multisim 2001 的帮助文件。有些器件是复合型结构，在同一个封装里有多个相互独立的对象。如 7400N，有 A、B、C、D 四个功能完全相同的二端与非门，可在选用器件时弹出的选择框中任意选取。

(7) CMOS 元(器)件库，该库如图 A.12 所示。

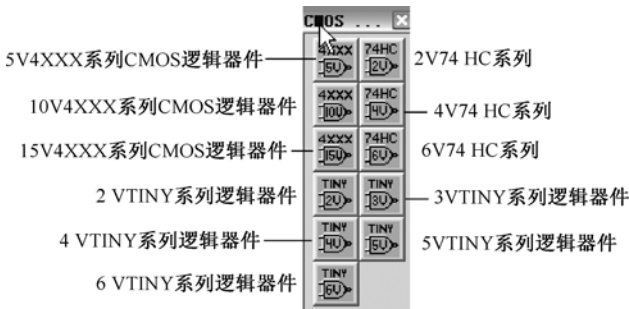


图 A.12 CMOS 器件库

(8) 其他数字元件(Misc. Digital Components)库

实际上是用 VHDL、Verilog-HDL 等其他高级语言编辑的虚拟元件按功能存放的数字元件，不能转换为版图文件。

(9) 混合器件(Mixed Components)库

该库如图 A.13 所示，其中 ADC-DAC 虽无绿色衬底，也属于虚拟元件。

(10) 指示器件(Indicators Components)库

该库如图 A.14 所示，含有 8 种 Multisim 2001 称之为交互式元件、用来显示电路仿真结果的显示器件。交互式元件不允许用户从模型进行修改，只能在其属性对话框中设置其参数。

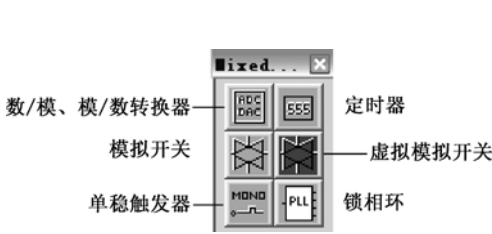


图 A.13 混合器件库

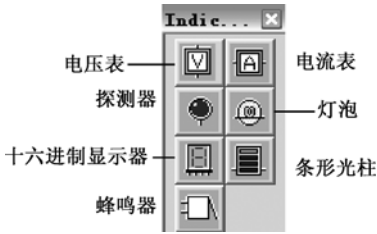


图 A.14 指示器件库

(11) 其他器件(Misc. Components)库是把不便化归于某一类型元件库中的元件放在了一起，如图 A.15 所示。

(12) 控制器件(Controls Components)库

该库有 12 个常用控制模块，如图 A.16 所示。虽无绿色衬底，仍属虚拟元件。

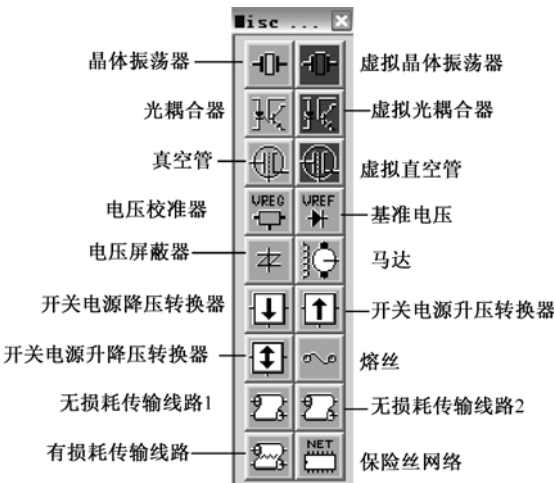


图 A.15 其他器件库

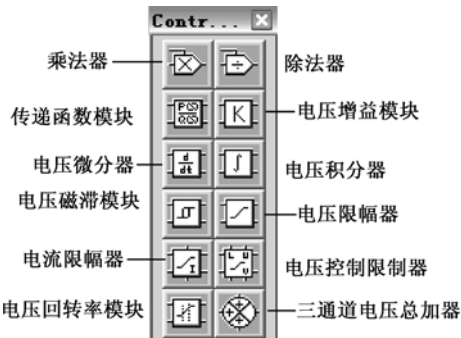


图 A.16 控制器件库

(13) 射频元件(RF Components)库

该库如图 A.17 所示，提供了一些适合高频电路的元件，这是目前众多电路仿真软件所不具备的。当信号处于高频工作状态时，电路元件的模型要产生质的改变。

(14) 机电类器件(Electro-Mechanical Components)库

该库共包含 9 个元件箱，除线性变压器外，都属于虚拟的电工类器件，如图 A.18 所示。

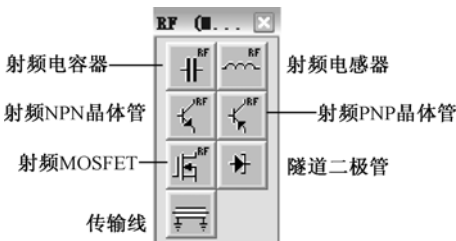


图 A.17 射频元件库



图 A.18 机电类器件库

7. 仪表工具栏(Instruments Toolbar)

Multisim 2001 提供了 11 种用来对电路工作状态进行测试的仪器、仪表，如图 A.19 所示。这些仪表的使用方法和外观与真实仪表相当，感觉就像实验室使用的仪器。

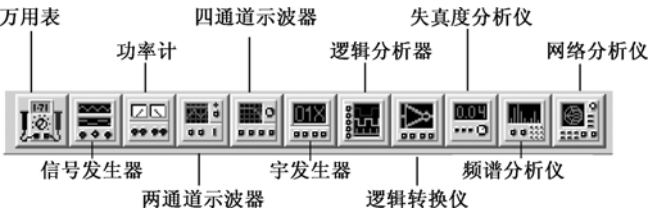


图 A.19 仪表工具栏

8. “.com” 按钮

这是提供给 Multisim 2001 用户的一个因特网入口,通过它可以访问一千多万个器件的 CAPSxpert 数据库,并可直接把有关元件的 Spice 模型及信息资料下载到用户的数据库中。

9. 电路窗口 (Circuit Window)

又称为 Workspace, 相当于一个现实工作中的操作平台。电路图的编辑绘制、仿真分析、波形数据显示等都将在此窗口中进行。

10. 状态条 (Status Line)

显示有关当前操作及鼠标所指条目的有用信息。

A.2 用户界面设置

创建一个电路之前, 通常应根据具体电路的要求和使用者的习惯设置一个特定的用户界面, 目的在于方便原理图的创建, 方便电路的仿真分析, 方便观察理解。用户界面设置包括工具栏、电路颜色、页尺寸、聚焦倍数、自动存储时间、符号系统 (分美式标准 ANSI 或欧式标准 DIN) 和打印设置, 界面设置与电路文件一起保存, 也可以对整个电路或个例进行重载 (如将一特殊的元件由红色变为蓝色)。

设置用户界面的操作主要通过主菜单 “Options” 下 “Preferences” 对话框中提供的各项选择功能实现。“Preferences” 对话框如图 A.20 所示。

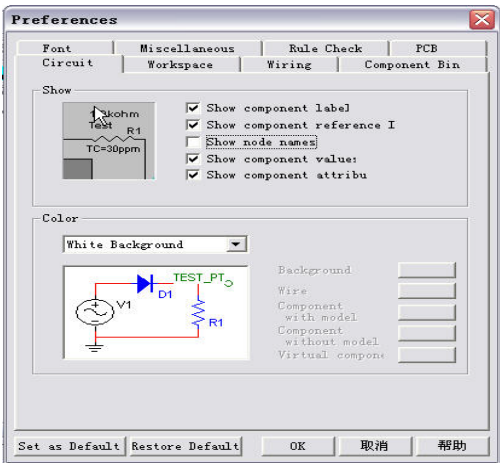


图 A.20 “Preferences” 对话框

该对话框中有 8 个选项卡, 每个选项卡中又包含了若干功能选项。适当选取这些选项就能对电路的界面进行较为全面的设置。如 “Workspace” 页可对电路显示窗口的图纸大小规格等进行设置; “Component Bin” 选项卡可对界面上元件箱出现的形式、元件箱内元件的符号标准及从元件箱中取用的方式进行设置。由于目前国际上有 ANSI (美国标准) 和 DIN (欧洲标准) 两套常用电气符号标准, 我国的标准与 DIN 相近, 故选取时应注意; “Circuit” 选项卡则是对电路窗口内元件和连线上所要显示的文字项目, 以及编辑窗口里各元器件和背景的颜色等进行设置; “Wiring” 选项卡用以设置电路导线宽度与连线方式; “Font” 选项卡是对元件的标识和参数值、节点、引脚名称、原理图文本和元器件属性等的文字进行设置; “Miscellaneous” 选项卡是对电路的备份、存盘路径、数字仿真速度及 PCB 接地方式的设置。

A.3 实验中用到的设备的使用方法

1. 数字万用表

(1) 面板操作

如图 A.21 所示为数字万用表的图标和面板,它可以自动调整量程,可用来测量交直流电压、电流、电阻和两个节点间的电压分贝值。按下面板图中的 Set(设置)按钮时,会弹出一个对话框,可进行万用表的内部参数设置。

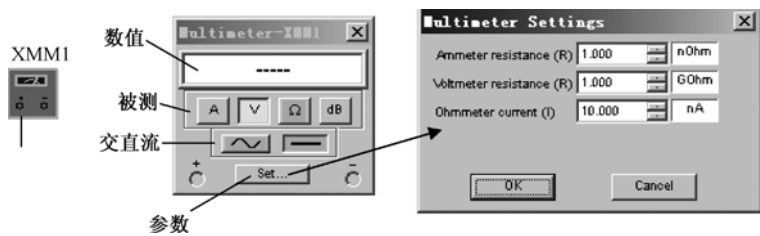


图 A.21 数字万用表的图标面板和参数

在参数设置对话框中, Ammeter resistance (R): 设置电流档的内阻,其大小影响电流的测量精度; Voltmeter resistance (R): 设置电压档的内阻,其大小影响电压的测量精度; Ohmmeter current (I): 设置用欧姆档测量时,流过欧姆表的电流值。

(2) 连接方法

图标上的+、-两个端子用来连接所要测试的端点,连接方法同实际的万用表一样。

- ①测电压或电阻时,应与所要测试的端点并联。
- ②测电流时,应串入被测支路中。

此外,在 Multisim 2001 的指示元件库中还放有虚拟电压表和电流表,它们可通过旋转改变引出线的方向,如图 A.22 所示。虚拟电压表和电流表是一种交直流两用数字表,在转换直流与交流测量方式时,可双击电压表图标,在弹出的对话框中 Value 选项的 Mode 下,选择直流(DC)或交流(AC)。当设置为交流模式时,显示的是交流电压的有效值。

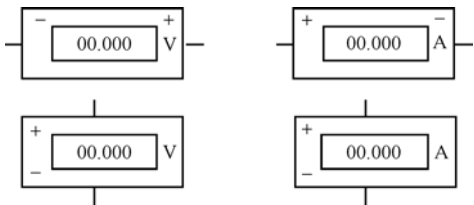


图 A.22 虚拟电压表和电流表

2. 示波器

示波器是电子测量中使用最为频繁的重要仪器之一,可用来观测信号的波形,并可测量信号的幅度、频率、周期和相位差等参数。Multisim 2001 提供了数字式存储示波器,借助它可以看到通常在实验室无法看到的瞬间变化的波形,并加以存储保留。示波器的图标和面板如图 A.23 所示。

这是一个双踪示波器,由 A、B 两个通道, G 是接地端, T 是外触发端。该虚拟示波器与实际的示波器的连接方式稍有不同,如图 A.24 所示。

其输出端与七段数码管相连。通过设置字信号发生器的输出状态从 0000H ~ 000FH 周期性的变化，观察数码管的显示状态，可以看到其显示从 0~9，而 000AH ~ 000FH 无显示，说明 74LS47 为一个 8421BCD 的译码/驱动电路。

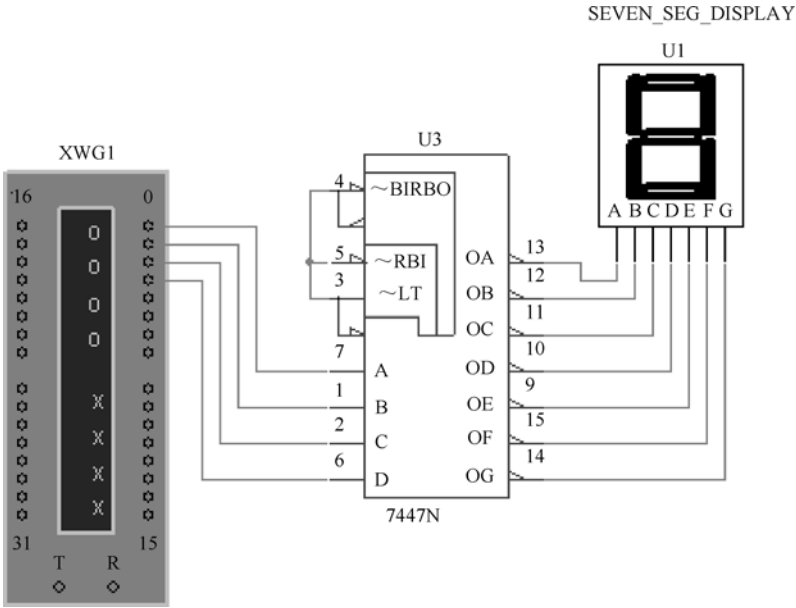


图 A.26 字信号发生器驱动七段译码器

4. 逻辑分析仪

逻辑分析仪是数据域测量的重要仪器，它最多可以同步记录和观察 16 路逻辑信号波形，主要用于对数字信号的高速采集和时序分析，是示波器无法替代的专用逻辑功能测试仪器，也是分析和调试数字系统不可多得的重要工具。图 A.27 所示为逻辑分析仪的图标和面板图。

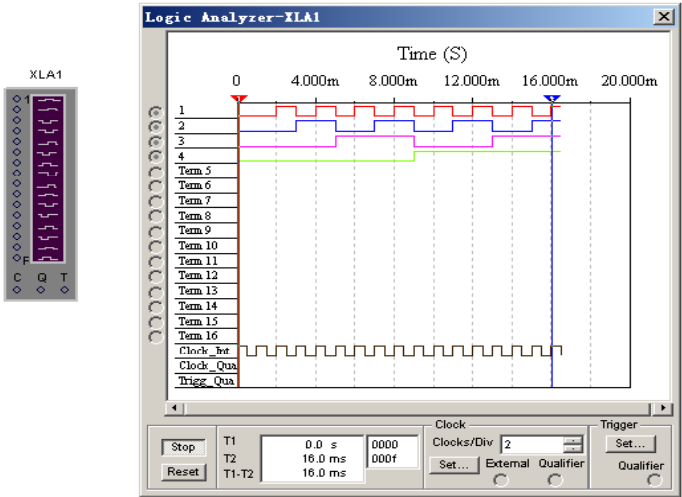


图 A.27 逻辑分析仪的图标和面板图

图标左侧 16 个端口是逻辑分析仪的输入信号端口，从上至下依次为最低位至最高位。图标下部还有 3 个端子，C 是外时钟输入端，Q 是时钟控制输入端，T 是触发控制输入端。

双击图标可以打开逻辑分析仪的面板，其操作如下：

被采集的多路信号以方波形式显示在显示区屏幕上，通过设置输入导线的颜色可以修改相应波形的颜色，这样可用颜色区分不同的多路信号。**Stop** 是停止仿真按钮，单击它可以显示当前的波形；**Reset** 是复位并清除显示波形按钮。

Clock 区：包括 Clock/Div 栏和 Set 按钮。

Clock/Div：设置在显示屏上单位水平刻度显示的时钟脉冲数。

Set 按钮：设置时钟脉冲，单击该按钮后出现如图 A.28 所示的对话框。

其中，Clock Source 区是时钟脉冲来源，如果选取 External 则设置成由外部取得时钟脉冲；如果选取 Internal 则设置成由内部取得时钟脉冲。Clock Rate 区的功能是选取时钟脉冲的频率。Sampling Setting 区的功能是设置取样方式。

Trigger 区：设置触发方式，单击“Set”按钮，出现如图 A.29 所示的对话框。其中，Trigger Clock Edge 区的功能是设定触发方式，包括 Positive(上升沿触发)、Negative(下降沿触发)、Both(升、降沿触发均可) 3 个选项。Trigger Patterns 区的功能是设置触发样本，可以在 Pattern A、Pattern B 及 Pattern C 栏中设定触发样本，也可以在 Trigger Combinations 栏中选择组合的触发样本。当所有项目选定后，单击“Accept”按钮即可确定。

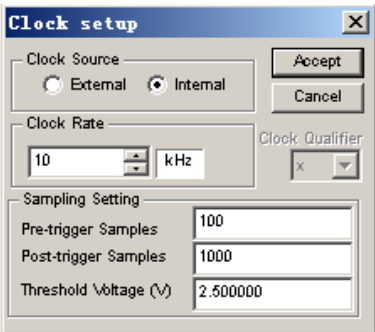


图 A.28 Clock setup 对话框

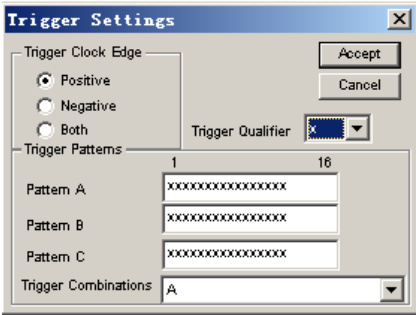


图 A.29 Trigger Setting 对话框

A.4 仿真实验的基本步骤

1. 放置元器件

从元件工具栏的元件库中选取所需器件，摆放于电路图纸的相应位置上。放置元件后，根据需要可以对其进行移动、删除、旋转等操作，这些操作可用编辑菜单命令来完成，也可以通过点击鼠标右键后选择快捷菜单中的选项来完成。

2. 线路和连接

Multisim 2001 有自动与手工两种连线方法。自动连线为 Multisim 2001 特有，选择管脚间最好的路径自动完成连线，它可以避免连线通过元件和连线重叠。手工连线要求用户控制连线路径。一般需将自动连线与手工连线结合使用。

(1) 自动连线：对于两元器件之间的连接，只要将光标移近所要连接的元件引脚一端，光标就会自动转变为十字形，点击左键，移动光标至另一元件的引脚，再次点击左键，程序即自动连接这两个引脚之间的线路。

若要元件与某一线路的中间连接，则光标先指向该引脚，点击左键，然后移到所要连接的线路上，

再点击左键，程序不但自动连接这两点，同时也在所连接线路的交叉点上，自动放置一个节点。若两条线交叉而过无节点时，则表示两条交叉线是不连接的。

(2) 手动连接：从元件的引脚引出线路的过程中，光标移动到移动路径的适当位置上，点击左键，即可得到一条自行设定的线轨迹。

(3) 线路轨迹调整：如需对已连接好的线路轨迹进行调整，可先将光标对准欲调整的线路，点击右键选中，再按住左键，拖动线上的小方块或两小方块之间的线段至适当位置后松开左键即可。

(4) 节点的放置：如果要想交叉线相连接的话，需要在交叉点上放置一个节点。操作方法是：启动“Place/Place Junction”命令，然后指向要放置节点的位置，点击鼠标左键，即可在该处放置一个节点，两条线就会连接。为了可靠连接，在放置节点之后，稍微移动一下与该节点相连的其中一个元件，看是否有“虚焊”。

(5) 连线与节点颜色的设置：为了使电路各连线及节点彼此之间清晰可辨，可对它们设置不同的颜色来区分，方法是：光标指针先指向某一连线或节点，点击右键选中，通过“Color”来设置颜色。

(6) 连线与节点的删除：选中要删除的连线与节点，选择“Delete”即可删除。

3. 存储文件

选择“File”→“Save As”菜单命令，给出存储路径和文件名，单击“OK”按钮。

4. 开始仿真

单击界面右上角的仿真开关，电路开始工作。

5. 观察记录仿真结果

参 考 文 献

- [1] 李翰逊. 简明电路分析. 5 版[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002
- [2] 郑秀珍. 电路与信号分析[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2005
- [3] 杨忠根, 任蕾, 陈红亮. 信号与系统[M]. 北京: 电子工业出版社, 2009
- [4] 郑君里, 应启珩, 杨为理. 信号与系统. 2 版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2001
- [5] 王宝祥, 胡航. 信号与系统习题及精解[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000
- [6] 将卓勤, 邓玉元等. Multisim2001 及其在电子设计中的应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003
- [7] 闻跃, 高岩, 杜普选. 基础电路分析. 2 版[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003
- [8] 刘晔. 电工技术[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010
- [9] Allan H Robbins, Wilhelm C Miller. Circuit Analysis: Theory and Practice [M]. 北京: 科学出版社, 2003
- [10] 周井泉, 于舒娟, 史学军. 电路与信号分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2009
- [11] 张永瑞, 高建宁. 电路、信号与系统[M]. 北京: 机械工业出版社, 2010
- [12] 郭琳, 姬罗栓. 电路分析[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010
- [13] 王应生, 周茜. 电路分析基础[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003
- [14] 常晓玲. 电工技术. 2 版[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2010
- [15] 刘辉路, 张秀国, 刘文革, 夏志华等. 电路分析与仿真教程与实训[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007
- [16] 黄智伟. 基于 Multisim 2001 的电子电路计算机仿真设计与分析[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005
- [17] 江晓安. 计算机电子电路技术——电路与模拟电子部分[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2001
- [18] 沈元隆, 刘陈. 电路分析[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2008
- [19] James W Nilsson, Susan A Riedel. 电路. 7 版[M]. 周玉坤等译. 北京: 电子工业出版社, 2005
- [20] 张永瑞. 电路分析基础. 3 版[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2006